Une généralisation des résultats de Kreweras sur le polynôme énumérateur des inversions dans les arborescences

Cedric Chauve, Philippe Duchon, Serge Dulucq

LaBRI, Université de Bordeaux I

Annales des Sciences Mathématiques du Québec, 24(2-3):23-38, 2000.

UNE GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS DE KREWERAS SUR LE POLYNÔME ÉNUMÉRATEUR DES INVERSIONS DANS LES ARBORESCENCES

CEDRIC CHAUVE, PHILIPPE DUCHON, SERGE DULUCQ

Résumé. Dans [9], Kreweras étudie les polynômes énumérateurs des inversions des arborescences de racine 1. Dans cet article, nous nous intéressons aux polynômes énumérateurs des inversions des arborescences telles que la racine est inférieure à ses fils, une famille d'arborescences introduite dans [3]. Nous obtenons des généralisations de plusieurs résultats de Kreweras [9]. Nous démontrons notamment une récurrence vérifiée par ces polynômes et nous montrons que leur évaluation en 0, 1, 2 et -1 prend des valeurs remarquables, liées à certaines familles de graphes connexes et aux nombres d'Euler et d'Entringer.

Abstract. In [9], Kreweras studies the inversion polynomial for rooted trees having root labelled 1. In this paper, we are interested in the inversion polynomial for rooted trees such that the root has no lower son, a family of trees introduced in [3]. We obtain a generalization for some results of Kreweras [9]. In particular, we prove a recurrence formula for this polynomial and we show that its value at 0, 1, 2 and -1 is related to some families of connected graphs and to the Euler and Entringer numbers.

1. Inversions et arborescences

On appelle *arborescence* sur $[n]$ un graphe connexe sans cycle, à n sommets étiquetés par $\{1,\cdots,n\}$, ayant un sommet distingué appelé la racine. Dans cet article nous nous intéressons à la famille des arborescences telles que la racine est inférieure à ses fils, introduite dans [3] (ces arborescences apparaissent aussi dans des travaux de Gessel traitant d'arrangements d'hyperplans, non publiés à ce jour mais cités dans [1]). Nous notons $\mathcal{A}_n$ l'ensemble de ces arborescences sur $[n]$ et $\mathcal{A}_{n,r}$ les arborescences de $\mathcal{A}_n$ de racine r. Dans [3], ces arborescences sont étudiées selon divers paramètres combinatoires classiques comme le nombre de sommets ou l'étiquette de la racine.

Une *inversion* dans une arborescence A est un couple (x,y) de sommets tels que $x > y$ et y est un descendant de x (x est sur l'unique chemin allant de la racine de A à y). On note $inv(A)$ le nombre d'inversions d'une arborescence A.

Mallows et Riordan [11] furent les premiers à considérer ce paramètre, pour la famille des arborescences de racine 1, et à introduire un polynôme relié à ce paramètre : le *polynôme énumérateur des inversions.*

Définition 1. *Soit $\mathcal{K}_n$ un ensemble d'arborescences sur $[n]$. Le polynôme énumérateur des inversions de $\mathcal{K}_n$ est défini par*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}_n}(q) = \sum_{A\in\mathcal{K}_n} q^{inv(A)}.$$

Le polynôme de la famille des arborescences de racine 1 est relié à de nombreux problèmes combinatoires, comme l'étude du polynôme de Tutte de certaines familles de graphes [6], les fonctions de parking [9, 13] et les fonctions de k-parking [20], l'activité externe d'une arborescence [2]. Plus récemment, il est apparu dans le cadre de l'énumération des régions de certaines familles d'arrangements d'hyperplans [18, 17]. Pour d'autres familles que les arborescences de Cayley, il existe peu de résultats. On peut essentiellement citer les travaux de Gessel, Sagan et Yeh [7] et de Chen [4] pour les arborescences ordonnées, cycliques et planes de racine 1.

On note $\mathcal{P}_n(q)$ le polynôme énumérateur des inversions des arborescences de racine 1 à n sommets. La première étude combinatoire détaillée de ce polynôme est due à Kreweras [9] qui donne notamment une preuve combinatoire d'une formule de récurrence pour $\mathcal{P}_n(q)$ (présente dans l'article de Mallows et Riordan [11]).

Proposition 1. [9, 11] *Le polynôme énumérateur des inversions des arborescences de racine 1 vérifie la relation de récurrence suivante :*

$$\mathcal{P}_1(q) = 1 \tag{1}$$

$$\mathcal{P}_{n+1}(q) = \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} \left(\sum_{i=0}^{m-1} q^i \right) \mathcal{P}_m(q)\mathcal{P}_{n+1-m}(q). \tag{2}$$

Il montre de plus qu'évalué en $q = -1,\ 0,\ 1,\ 2$, le polynôme $\mathcal{P}_n(q)$ prend des valeurs remarquables, qui font notamment intervenir les nombres d'Euler et le nombre de graphes étiquetés simples connexes.

Définition 2. *On note e_n le $n^{\text{ème}}$ nombre d'Euler, ces nombres étant définis par*

$$e_0 = 1$$

$$e_{n+1} = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2m} e_{2m} e_{n-2m}.$$

Proposition 2. [9]

$$\mathcal{P}_n(0) = (n-1)!, \tag{3}$$

$$\mathcal{P}_n(1) = n^{n-2}, \tag{4}$$

$$\mathcal{P}_n(-1) = e_{n-1}. \tag{5}$$

Les preuves des identités (3) et (4), présentes dans l'article [11] de Mallows et Riordan, sont immédiates : $\mathcal{P}_n(0)$ est le nombre d'arborescences croissantes sur $[n]$ (tout sommet est supérieur à tous ses fils), c'est à dire$(n-1)!$, et $\mathcal{P}_n(1)$ est le nombre d'arborescences sur $[n]$ de racine 1, c'est à dire n^{n-2} (voir [12]). La preuve de l'identité (5) donnée par Kreweras est basée sur la similarité des récurrences satisfaites par $\mathcal{P}_n(-1)$ et par les nombres d'Euler. Or les nombres d'Euler énumèrent de nombreux objets combinatoires, comme par exemple les permutations alternantes [10] ou les arborescences croissantes paires [19]. Pansiot [14] a utilisé cette propriété pour donner une preuve bijective de (5), basée sur une technique que nous utilisons dans la dernière section de cet article pour généraliser ce résultat aux arborescences de $\mathcal{A}_{n,r}$.

Définition 3. *On appelle graphe simple sur $[n]$ un graphe à n sommets étiquetés sur $\{1, \cdots, n\}$, n'ayant ni boucle ni arête multiple. On note $\mathcal{G}_n$ l'ensemble des graphes simples connexes sur $[n]$, $g_n = |\mathcal{G}_n|$ et $a(G)$ le nombre d'arêtes d'un graphe G.*

Proposition 3. [9]

$$\mathcal{P}_n(1+q) = \sum_{G\in\mathcal{G}_n} q^{a(G)-n+1}, \tag{6}$$

$$\mathcal{P}_n(2) = g_n. \tag{7}$$

La première preuve de ce résultat est due à Kreweras qui montre que le nombre de graphes connexes simples étiquetés sur $[n]$ satisfait une récurrence similaire à celle de $\mathcal{P}_n(2)$ et en déduit (7). Dans [8], Gessel et Wang proposent une preuve bijective de (6) basée sur la notion de parcours en profondeur d'un graphe. Nous reprenons ce principe dans la prochaine section pour prouver un résultat analogue pour le polynôme associé aux arborescences de $\mathcal{A}_{n,r}$.

2. Premiers résultats sur le polynôme des inversions de $\mathcal{A}_n$

Dans les deux dernières sections de cet article, nous nous intéressons au polynôme des inversions des arborescences dont la racine est inférieure à ses fils. Nous notons $\hat{\mathcal{P}}_n(q)$ le polynôme associés à ces arborescences. Plus précisément, nous examinons, pour un $r \in [n-1]$ fixé, les arborescences de $\mathcal{A}_{n,r}$, et nous notons $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(q)$ le polynôme des inversions de ces arborescences (on a donc $\mathcal{P}_n(q) = \hat{\mathcal{P}}_{n,1}(q)$). Pour ce polynôme, nous obtenons des généralisations des Propositions 1, 2 et 3 (en posant $r=1$ dans nos résultats, on retrouve les résultats de Kreweras). Dans la présente section, nous nous intéressons à une formule de récurrence pour ces polynômes et à leur évaluation en 0, 1 et 2. Nous relions notamment cette dernière valeur $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(2)$ à l'énumération de graphes simples connexes sur $[n]$ tels que le sommet r est inférieur à ses voisins. Dans la dernière section, nous nous intéressons à $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(-1)$, que nous relions aux nombres d'Entringer et aux nombres d'Euler.

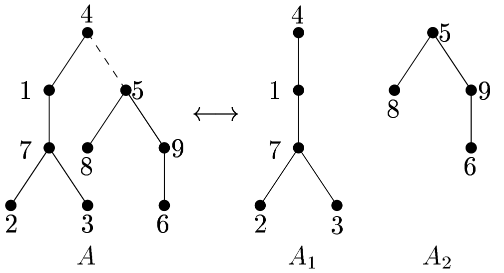
Proposition 4. *Le polynôme énumérateur des inversions des arborescences de $\mathcal{A}_{n,r}$ vérifie la relation de récurrence suivante,*

$$\hat{\mathcal{P}}_{r,r}(q) = \begin{cases} 1 \text{ si } r=1, \\ 0 \text{ sinon}, \end{cases} \tag{8}$$

$$\hat{\mathcal{P}}_{n+1,r}(q) = \sum_{m=1}^{n+1-r}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{n-r-1}{m-1}\binom{r-1}{k}\left(q^{2k}\sum_{i=0}^{m-1}q^i\right)\hat{\mathcal{P}}_{k+m,1}(q)\hat{\mathcal{P}}_{n',r'}(q), \tag{9}$$

où $n' = (n+1-m-k)$ et $r' = (r-k)$.

Preuve. La preuve de ce résultat est basée sur le même principe que la preuve du cas $r=1$ exposée par Kreweras dans [9]. Tout d'abord, la preuve de (8) est immédiate. Ensuite, soit A une arborescence de $\mathcal{A}_{n+1,r}$ et x son seul fils situé sur le chemin allant de r à $n+1$. En supprimant l'arête reliant r et x, on obtient deux arborescences A_1 et A_2 telles que r est la racine de A_1 et est inférieur à ses fils, x est la racine de A_2 et est supérieur à r, et $n+1$ appartient à A_2.



Si on note, pour une arborescence A et un entier l, $|A|_{>l}$ (resp. $|A|_{<l}$) le nombre de sommets de A supérieurs (resp. inférieurs) à l, on a alors $inv(A) = inv(A_1) + inv(A_2) + |A_2|_{<r}$. En posant $k = |A_2|_{<r}$ et $m = |A_2|_{>r}$, on peut dire que A_1 comporte $n' = (n+1-m-k)$ sommets, dont exactement $r' = (r-k-1)$ sont inférieurs à sa racine r, et on explique ainsi le terme $\hat{\mathcal{P}}_{n',r'}(q)$ de (9), relié à $inv(A_1)$. Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_{k+m}$ les sommets de A_2 et x_i sa racine. On note A_2' l'arborescence obtenue à partir de A_2 en échangeant successivement les sommets x_i et x_{i-1}, puis x_{i-1} et x_{i-2}, $\cdots$, puis x_2 et x_1. On obtient alors une arborescence de racine x_1 (c'est à dire dont la racine est le plus petit sommet), et en remarquant que chaque échange de deux sommets consécutifs x_j et x_{j-1} diminue le nombre d'inversions de 1, on obtient que $inv(A_2) = inv(A_2') + i - 1$, avec $i > k$ car la racine de A_2 est supérieure à r et $k = |A_2|_{<r}$. On obtient ainsi l'explication du terme

$$\left(\sum_{i=k}^{k+m-1} q^i\right) \hat{\mathcal{P}}_{k+m,1}(q),$$

et en rappelant que le nombre d'inversions de la forme (r,x) avec x dans A_2 est $|A_2|_{<r}$, c'est à dire k, on prouve le résultat désiré. $\square$

Proposition 5.

$$\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(0) = \begin{cases} (n-1)! \text{ si } r = 1, \\ 0 \text{ sinon}, \end{cases} \tag{10}$$

$$\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(1) = (n-r)n^{n-r-1}(n-1)^{r-2}. \tag{11}$$

Preuve. $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(0)$ est le nombre d'arborescences croissantes de racine r inférieure à ses fils. Une arborescence croissante étant obligatoirement de racine 1, on a immédiatement la preuve de (10). $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(1)$ est le nombre d'arborescences de $\mathcal{A}_{n,r}$. L'identité (11) découle immédiatement de cette remarque et du fait que $|\mathcal{A}_{n,r}| = (n-r)n^{n-r-1}(n-1)^{r-2}$ (cf [3]). $\square$

Le corollaire suivant est alors une conséquence immédiate du fait que $|\mathcal{A}_n| = (n-1)^{n-1}$ (cf [3]).

Corollaire 1.

$$\hat{\mathcal{P}}_n(0) = (n-1)!, \tag{12}$$

$$\hat{\mathcal{P}}_n(1) = (n-1)^{n-1}. \tag{13}$$

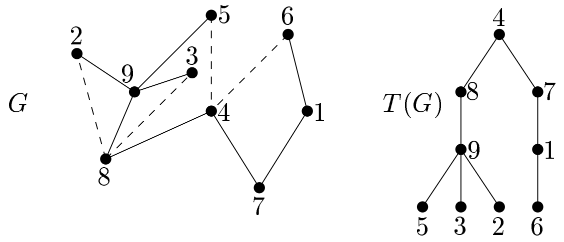
On note $\mathcal{G}_{n,r}$ l'ensemble de graphes simples connexes sur $[n]$ tels que le sommet r est inférieur à tous ses voisins (les sommets reliés à r par une arête), et $g_{n,r} = |\mathcal{G}_{n,r}|$.

Proposition 6.

$$\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(1+q) = (1+q)^{2(r-1)} \sum_{G \in \mathcal{G}_{n,r}} q^{a(G)-n+1}, \tag{14}$$

$$\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(2) = 2^{2(r-1)} g_{n,r}. \tag{15}$$

Preuve. Nous reprenons la technique utilisée par Gessel et Wang [8] pour prouver bijectivement la Proposition 3. Soit G un graphe de $\mathcal{G}_{n,r}$. On appelle *arborescence couvrante maximale de* G, notée $T(G)$, l'arborescence obtenue en parcourant G à partir du sommet r de la manière suivante : si x est le dernier sommet visité lors du parcours, le sommet visité suivant sera le plus grand voisin de x non déjà visité. Dans l'exemple suivant, les arêtes pleines sont les arêtes suivies lors d'un tel parcours du graphe G, avec $r = 4$.



Soit A une arborescence de racine r. On introduit l'ensemble $E(A)$ des arêtes que l'on peut ajouter à A de sorte que le graphe ainsi obtenu appartient à $\mathcal{G}_{n,r}$ et a A pour arborescence couvrante maximale. Formellement, $E(A)$ est l'ensemble des couples (x,y) tels que si z est à la fois un fils de x et un ancêtre de y, alors (z,y) est une inversion dans A. Dans notre exemple, $E(T(G)) = \{(4,5),(4,6),(8,2),(8,3),(8,5)\}$. On remarque que chaque inversion (z,y) de A induit un couple de $E(A)$ sauf si

- $z = r$ ou
- z est un fils de r et $y < r$.

On en déduit donc que $|E(A)| = inv(A) - 2(r-1)$. On note $\mathcal{G}_A$ l'ensemble des graphes G tels que $T(G) = A$. Par définition de l'arborescence couvrante maximale d'un graphe et de $E(A)$, on peut dire que, pour une arborescence A donnée, un graphe G appartient à $\mathcal{G}_A$ si et seulement si toutes les arêtes de G non présentes dans A appartiennent à $E(A)$. On en déduit que, si $|A| = n$,

$$\sum_{G \in \mathcal{G}_A} q^{a(G)} = q^{n-1}(1+q)^{inv(A)-2(r-1)},$$

le terme q^{n-1} correspondant aux arêtes de A et le terme $(1+q)^{inv(A)-2(r-1)}$ correspondant aux autres arêtes qui sont choisies dans $E(A)$. En sommant sur toutes les arborescences couvrantes maximales, c'est à dire sur toutes les arborescences de $\mathcal{A}_{n,r}$, on obtient (14). Pour obtenir (15) il suffit de poser $q = 1$ dans (14). □

La preuve du corollaire suivant est alors immédiate.

Corollaire 2.

$$\hat{\mathcal{P}}_n(1+q) = \sum_{G \in \mathcal{G}_n} q^{a(G)-n+1} \mathcal{Q}_G(1+q) \tag{16}$$

où, si on note $S(G)$ l'ensemble des sommets de G inférieurs à leurs voisins,

$$\mathcal{Q}_G(q) = \sum_{s \in S(G)} q^{2(s-1)}.$$

3. Evaluation de $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(-1)$

L'évaluation de $\mathcal{P}_n(-1)$ fait apparaître des nombres bien connus, les nombres d'Euler. Il existe plusieurs suites d'entiers raffinant les nombres d'Euler, dont la suite des nombres d'Entringer [5], qui ont de nombreuses interprétations combinatoires en termes de permutations alternantes ou d'arborescences [10, 15, 16].

Définition 4. *Les nombres d'Entringer $e_{n,k}$ sont définis par la récurrence.*

$$e_{n,n} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

$$e_{n+1,k+1} = e_{n+1,k} - e_{n,n+1-k}.$$

Ils sont reliés aux nombres d'Euler par la relation

$$e_n = e_{n+1,1} = \sum_{k=1}^{n} e_{n,k}. \tag{17}$$

Proposition 7.

$$\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(-1) = e_{n,r}. \tag{18}$$

Avant de présenter la preuve de cette proposition, on peut remarquer qu'en posant $r = 1$ et par la relation (17), on retrouve le fait que $\mathcal{P}_n(-1) = e_{n-1}$. De plus, toujours par la relation (17), on obtient immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 3.

$$\hat{\mathcal{P}}_n(-1) = e_n. \tag{19}$$

La fin de cet article est consacrée à la preuve de la Proposition 7, pour laquelle nous nous inspirons de la preuve de l'identité (5) due à Pansiot [14]. Nous procédons en trois étapes :

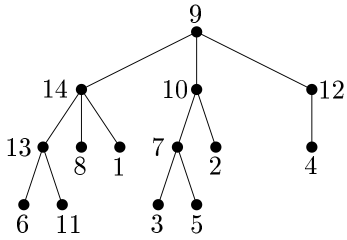
(1) exhiber un sous-ensemble $\mathcal{B}_{n,r}$ de $\mathcal{A}_{n,r}$, de cardinal $e_{n,r}$, dont chaque arborescence a un nombre pair d'inversions,
(2) partitionner $\mathcal{A}_{n,r}$ en sous-familles $C_1, \cdots ,C_l$ telles que pour tout $i = 1, \cdots ,l$, C_i contient au plus une arborescence de $\mathcal{B}_{n,r}$ (on aura alors $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(-1) = \sum_{i=1}^{l} \mathcal{P}_{C_i}(-1)$),
(3) montrer que $\mathcal{P}_{C_i}(-1) = 1$ si C_i contient une arborescence de $\mathcal{B}_{n,r}$ et $\mathcal{P}_{C_i}(-1) = 0$ sinon, ce qui prouvera la Proposition 7.

3.1. Une sous-famille $\mathcal{B}_{n,r}$ de $\mathcal{A}_{n,r}$ de cardinal $e_{n,r}$.

Pour définir la famille d'arborescences $\mathcal{B}_{n,r}$, il est nécessaire d'introduire la notion d'arborescence paire, utilisée notamment par Pansiot [14], Viennot [19] ou Kuznetsov, Pak et Postnikov [10] : une arborescence est *paire* si tout sommet différent de la racine a un nombre pair de fils.

$\mathcal{B}_{n,r}$ est la famille des arborescences A de $\mathcal{A}_{n,r}$ telles que, si $x_1,x_2, \cdots ,x_k$ sont les fils de r et $A_1,A_2, \cdots ,A_k$ les sous-arborescences de A de racines respectives $x_1,x_2, \cdots ,x_k$, les A_i

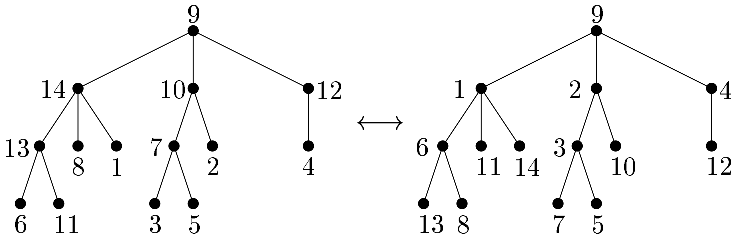
sont des *arborescences décroissantes paires contenant chacune un nombre impair de sommets supérieurs à r*. La figure suivante présente une telle arborescence.



Lemme 1. *Pour tout arborescence A de $\mathcal{B}_{n,r}$, $inv(T)$ est pair.*

Preuve. Soit $A \in \mathcal{B}_{n,r}$. On déduit du fait que les A_i sont des arborescences décroissantes paires que, pour chaque sommet $x \neq r$ et $x \neq x_i$, x a un nombre pair de descendants, et est supérieur à tous ses descendants. Il existe donc un nombre pair d'inversions de la forme (x,y) avec $x \neq r$ et $x \neq x_i$. La parité de $inv(A)$ est donc celle du nombre d'inversions de la forme (r,y) ou (x_i,y), pour $i = 1,2,\cdots,k$. Le nombre d'inversions de la forme (x_i,y) est égal à $n-k-1$. De plus, le nombre d'inversions de la forme (r,y) est égal à $n-1-\sum_{i=1}^{k}|A_i|_{>r}$. Il s'ensuit que la parité de $inv(A)$ est celle de $2n-2-k\sum_{i=1}^{k}|A_i|_{>r} = 2n-2-\sum_{i=1}^{k}(|A_i|_{>r}-1)$. Il suffit alors de rappeler que par définition d'une arborescence décroissante paire, $|A_i|_{>r}$ est impair, pour $i = 1,2,\cdots,k$, pour conclure la preuve de ce lemme. □

Soit $\overline{\mathcal{B}}_{n,r}$ la famille des arborescences A telles que, si $x_1,x_2,\cdots,x_k$ sont les fils de r et $A_1,A_2,\cdots,A_k$ les sous-arborescences de A de racines respectives $x_1,x_2,\cdots,x_k$, les A_i sont des *arborescences croissantes paires contenant chacune un nombre impair de sommets supérieurs à r*. Il existe une bijection immédiate entre $\overline{\mathcal{B}}_{n,r}$ et $\mathcal{B}_{n,r}$ (elle consiste, pour chaque A_i, à échanger son plus grand sommet et son plus petit sommet, puis son second plus grand et son second plus petit, etc). La figure suivante représente une arborescence de $\mathcal{B}_{n,r}$ et l'arborescence correspondante de $\overline{\mathcal{B}}_{n,r}$.



Soit $\mathcal{C}_{n,r}$ la famille des arborescences croissantes paires sur $[n]$ telles que le père du sommet n est le sommet r. Kuznetsov, Pak et Postnikov [10] ont montré bijectivement que $|\mathcal{C}_{n+1,r}| = e_{n,r}$. Pour prouver que $\mathcal{B}_{n,r} = e_{n,r}$, il suffit donc d'établir une bijection entre $\mathcal{C}_{n+1,r}$ et $\overline{\mathcal{B}}_{n,r}$, ce que nous faisons maintenant.

Lemme 2. *Il existe une bijection ϕ entre $\mathcal{C}_{n+1,r}$ et $\overline{\mathcal{B}}_{n,r}$.*

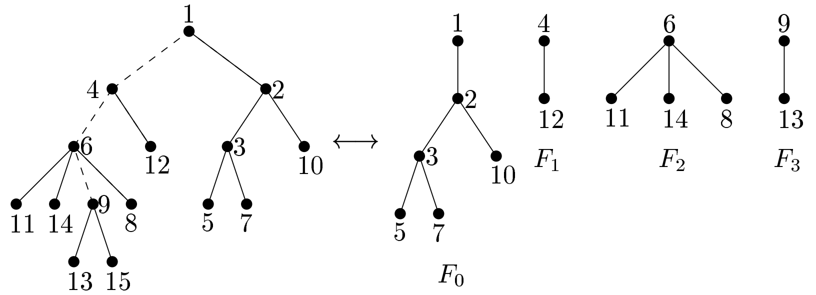
Preuve. Soit A une arborescence de $\mathcal{C}_{n+1,r}$. On distingue deux cas.

Cas 1. Dans un premier temps, on traite le cas où $r = 1$ (c'est à dire la racine de A). Dans ce cas, $\phi(A)$ est obtenue en supprimant le sommet $n+1$ de A. Du fait que A est une arborescence croissante paire, on a bien $\phi(A) \in \overline{\mathcal{B}}_{n,r}$. On a donc traité le cas $r = 1$ (on a une bijection entre les arborescences de $\mathcal{C}_{n+1,1}$ et les arborescences de $\overline{\mathcal{B}}_{n,1}$).

Cas 2. On suppose maintenant que $r \neq 1$. La bijection ϕ, qui se décompose alors en 4 étapes que nous illustrons au fur et à mesure par un exemple, est basée sur les notions de de *l-forêt paire* et de *l-forêt impaire* d'une arborescence, pour un entier l donné.

Soit B une arborescence sur $[n]$, l un entier quelconque, $x_1, \cdots ,x_k$ les fils de la racine de B et $B_1, \cdots ,B_k$ les sous-arborescences de B de racines respectives $x_1, \cdots ,x_k$: la l-forêt paire (resp. impaire) de B est le sous-ensemble des B_i ayant un nombre pair (resp. impair) de sommets supérieurs à l.

Etape 1. On supprime dans A le sommet $n+1$, puis, en supprimant toutes les arêtes du chemin allant de la racine 1 à r, on construit une forêt ordonnée $F = (F_0,F_1, \cdots , F_k)$ de $k+1$ arborescences de racines respectives $x_0(=1) < x_1 < \cdots < x_k(=r)$. La construction inverse, produisant A à partir de F, est immédiate. Dans notre exemple, on considère une arborescence de $\mathcal{C}_{15,9}$. La figure suivante illustre cette décomposition de A en F (les arêtes en pointillées représentent le chemin de la racine 1 au sommet r).



La forêt F vérifie alors la propriété suivante.

(a) *Pour $i = 0,1, \cdots ,k$, F_i est une arborescence croissante paire. De plus, si $i > 0$, la racine x_i de F_i a un nombre impair de fils.*

Etape 2. On partitionne F en trois ensembles : l'arborescence F_k, $F' = (F'_0,F'_1, \cdots ,F'_l)$, avec $0 \leq l \leq k-2$, et $F'' = (F''_1, \cdots ,F''_{k-l})$ (si $l = k$, F'' est vide) tels que F' (resp. F'') contient F_0 ($F'_0 = F_0$) et les arborescences de F différentes de F_0 (resp. F_k) ayant un nombre pair (resp. impair) de sommets supérieurs à r. Dans notre exemple, $l = 1$, $F'_1 = F_2$ et $F''_1 = F_1$. La construction inverse, produisant F à partir de F_k, F' et F'' est immédiate, et F' et F'' vérifient les propriétés suivantes.

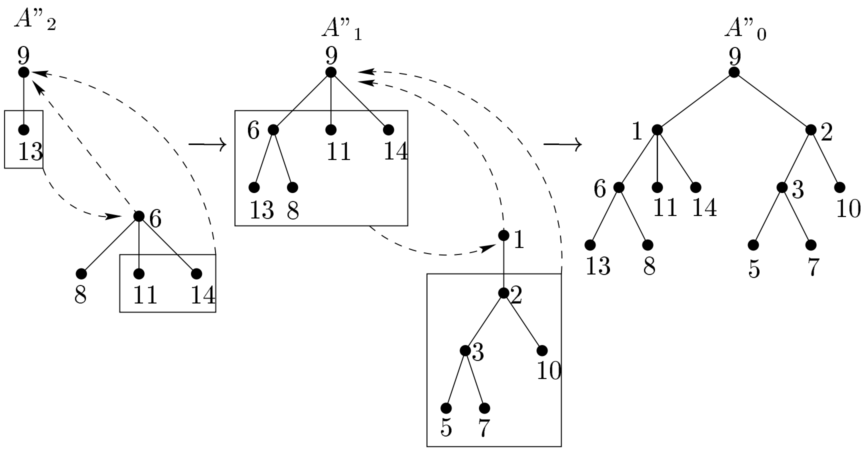
(b) *Pour tout $i > 0$, la r-forêt impaire (resp. paire) de F'_i contient un nombre pair (resp. impair) d'arborescences.*

En effet, si la la r-forêt impaire (resp. paire) de F'_i contient un nombre impair (resp. pair) d'arborescences, par (a) on sait que sa r-forêt paire (resp. impaire) contient un nombre impair (resp. pair) d'arborescences, ce qui entraîne que $|F'_i|_{>r}$ est impair, et est en contradiction avec la définition des F'_i.

(c) *Pour tout $i \geq 0$, la r-forêt impaire (resp. paire) de F''_i contient un nombre impair (resp. pair) d'arborescences.*

On prouve (c) de la même manière que (b).

Etape 3. La troisième étape consiste à construire de manière incrémentale une arborescence A'' à partir de F_k de la manière suivante. On commence par poser $A''_{l+1} = F_k$, puis pour i allant de l à 0, on échange les r-forêts impaires de F'_i et A''_{i+1} (les arborescences de la r-forêt impaire de F'_i sont insérées sous la racine de A''_{i+1} pendant que, simultanément, les arborescences de la r-forêt impaire de A''_{i+1} sont insérées sous la racine x'_i de F'_i) et enfin on insère l'arborescence F'_i ainsi modifiée sous la racine de A''_{i+1} (x'_i devient un fils de cette racine) pour obtenir A''_i. Finalement, on pose $A'' = A''_0$. Sur notre exemple, on effectue donc les opérations suivantes.



On vérifie alors les propriétés suivantes.

(d) *Pour $i = 0, \cdots, l+1$, la racine de A''_i est r.*

La racine de $F_k = A''_{l+1}$ est r, par définition de F_k, et aucune des opérations effectuées lors du passage de A''_{i+1} à A''_i ne modifie cette racine.

(e) *Pour $i = 1, \cdots, l+1$, r a un nombre impair de fils et pour $i = 0, \cdots, l+1$, la r-forêt paire de A''_i est vide.*

Pour le cas $i = l+1$, cela découle directement de la définition de F_k, qui est une arborescence croissante paire de racine r, et de la propriété (a) qui assure que r a un nombre impair de fils. Pour le cas général, cela découle de la transformation de A''_{i+1} en A''_i :

- on remplace la r-forêt impaire de F'_i, qui contient un nombre pair d'arborescences, sauf éventuellement si $i = 0$ (propriété (b)), par celle de A''_{i+1}, qui en contient un nombre impair (par induction), ce qui entraîne que parmi ses descendants, x'_i a maintenant un nombre impair de sommets supérieurs à r,
- on remplace la r-forêt impaire de A''_i (par induction, cela revient à enlever tous les fils de r) par celle de F'_i et la nouvelle arborescence de racine x'_i, c'est à dire un nombre impair d'arborescences, ayant toutes un nombre impair de sommets supérieurs à r.

(f) *Pour $i = 0, \cdots, l$, le plus petit fils de r est x'_i (la racine de F'_i).*

Les fils de r dans A''_i sont les racines de la r-forêt impaire de F'_i (c'est à dire des sommets supérieurs à x'_i, F'_i étant une arborescence croissante) et x'_i lui-même.

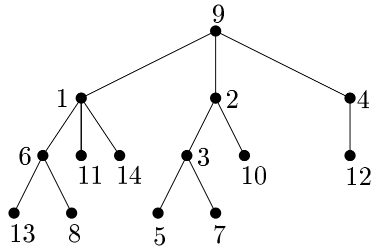
(g) *Pour $i = 0, \cdots, l+1$, les sous-arborescences de A''_i ayant pour racines les fils de r sont croissantes paires.*

Cette propriété découle directement de la propriété (a) qui assure que les F'_i sont des arborescences croissantes paires.

En utilisant la propriété (f), on définit la construction inverse, donnant F_k et F' à partir d'une arborescence A'' de r-forêt paire vide : tant que le plus petit fils x de la racine r de A'' vérifie $x < r$ (on note A_x la sous-arborescence de A'' de racine x), on supprime l'arête reliant r et x, on échange simultanément les r-forêts impaires de A'' (privé de A_x) et de A_x, puis on ajoute l'arborescence A_x ainsi modifié à F' ; l'arborescence A'' restant quand r est inférieur à tous ses fils est F_k.

Etape 4. Finalement, la dernière étape consiste à insérer sous la racine r de A'' toutes les arborescences de F''. On déduit des propriétés (c), (d), (e) et (g) que l'arborescence A' ainsi obtenue appartient bien à $\overline{\mathcal{B}}_{n,r}$.

A'



La construction inverse, donnant F'' et A'' à partir de A', est basée sur les propriétés (c) et (e) et sur le fait que F_0 est de racine 1 et n'appartient pas à F''. Elle consiste à supprimer dans A' toutes les arêtes entre la racine r et ses sous-arborescences de racine différente de 1 ayant une r-forêt paire contenant un nombre pair d'arborescences. Les arborescences ainsi extraites de A' forment F''. □

Nous avons donc complété la première étape de la preuve de la Proposition 7, en exhibant un sous-ensemble de $\mathcal{A}_{n,r}$ de cardinal $e_{n,r}$ et ne contenant que des arborescences ayant un nombre pair d'inversions.

3.2. **Partition de la famille $\mathcal{A}_{n,r}$.** Dans la seconde étape, nous partitionnons $\mathcal{A}_{n,r}$ en classes $C_1, \cdots, C_l$ contenant chacune au plus une arborescence de $\mathcal{B}_{n,r}$. Nous allons définir cette partition en termes de classes d'équivalence pour une relation basée sur la notion de *sommets échangeables*, introduite par Pansiot [14].

Définition 5. *Soit A une arborescence, x et y deux sommets de A tels que y est un descendant de x. On dit que x et y sont* échangeables *si il n'existe pas de sommet z descendant de x vérifiant $x < z < y$ ou $y < z < x$.*

Définition 6. *Soient A et A' deux arborescences de $\mathcal{A}_{n,r}$. On dit que A et A' sont* équivalentes pour l'échange racine-contraint *si il existe k arborescences $A_1, \cdots, A_k$ de $\mathcal{A}_{n,r}$ telles que $A_1 = A$, $A_k = A'$ et, pour $0 < i < k$, A_i et A_{i+1} diffèrent par l'échange de deux sommets échangeables.*

Notation 1. Pour une arborescence A de $\mathcal{A}_{n,r}$, on note $C_r(A)$ l'ensemble des arborescences équivalentes à A pour l'échange racine-contraint.

La relation d'équivalence ainsi définie à partir de la notion d'échange racine-contraint induit donc une partition de $\mathcal{A}_{n,r}$ en classes d'équivalence, les classes $C_r(A)$ pour toutes les arborescences A de $\mathcal{A}_{n,r}$. Pour vérifier que toute classe contient au plus une arborescence de $\mathcal{B}_{n,r}$, on introduit une deuxième relation d'équivalence liée à la notion d'échange.

Définition 7. *Soit $l \in [n]$. On dit que deux arborescences A et A' sont* équivalentes pour l'échange l-contraint *si il existe k arborescences $A_1, \cdots, A_k$ telles que $A_1 = A$, $A_k = A'$, pour tout i la racine de A_i est supérieure ou égale à l et, pour $0 < i < k$, on passe de A_i à A_{i+1} par l'échange de deux sommets échangeables.*

Notation 2. Pour un entier l et une arborescence A de racine supérieure ou égale à l, on note $C^l(A)$ l'ensemble des arborescences équivalentes à A pour l'échange l-contraint.

Lemme 3. *Soient l et n deux entiers tels que $l \in [n]$, et A une arborescence sur $[n]$ de racine supérieure ou égale à l. Alors $C^l(A)$ contient* une et une seule *arborescence décroissante.*

Preuve. Il est clair que la classe $C^l(A)$ contient au moins une arborescence décroissante : par une série d'échanges l-contraint on peut faire "remonter" n à la racine, puis, pour chacun des fils de la racine, le remplacer par le plus grand sommet de sa sous-arborescence, etc. Il reste donc à montrer qu'il n'y en a qu'une seule. Pour cela il suffit de remarquer que si A' et A'' sont deux arborescences décroissantes de $C^l(A)$, du fait qu'elles ont n pour racine, tout couple (x,y) de sommets de A' a n pour plus proche ancêtre commun si et seulement le même couple de sommets (x,y) a aussi n pour plus proche ancêtre commun dans A''. En répétant récursivement ce raisonnement sur les sous-arborescences de A' et A'' ayant pour racines les fils de n, on montre que tout couple de sommets (x,y) a même plus proche ancêtre commun dans A' et A'', et donc que $A' = A''$. □

Notation 3. Pour une arborescence A, de racine supérieure ou égale à l, on note $Dec^l(T)$ l'unique arborescence décroissante de $C^l(T)$.

Lemme 4. *Soit $A \in \mathcal{A}_{n,r}$. Alors $C_r(A)$ contient* une et une seule *arborescence A' telle que sa racine r est inférieure à ses fils $x_1, \cdots ,x_k$ et ses sous-arborescences $A'_1, \cdots ,A'_k$ de racines respectives $x_1, \cdots ,x_k$ sont décroissantes.*

Preuve. Comme on effectue seulement des échanges racine-contraints, si deux arborescences A' et A'' appartiennent à $C_r(A)$, le plus proche ancêtre commun de (x,y) dans A' est r si et seulement si le plus proche ancêtre commun de (x,y) dans A'' est r. En appliquant le Lemme 3 aux sous-arborescences de A' et A'' ayant pour racines les fils de r, on en déduit qu'au plus une des deux arborescences A' et A'' peut vérifier les conditions du lemme. □

Notation 4. Pour une arborescence $A \in \mathcal{A}_{n,r}$, on note $Dec_r(A)$ l'unique arborescence de $C_r(A)$ vérifiant les propriétés de l'arborescence A' dans l'énoncé du Lemme 4.

Nous avons donc complété la deuxième étape de la preuve de la proposition 7, en décrivant une partition de $\mathcal{A}_{n,r}$ en classes telles que chacune d'entre elles contient au plus une arborescence de $\mathcal{B}_{n,r}$.

3.3. **Evaluation en -1 du polynôme énumérateurs des inversions des classes $C_r(A)$.** Dans cette dernière partie de la preuve, pour toute arborescence A, on note $\mathcal{P}_{C_r(A)}(q)$ (resp. $\mathcal{P}_{C^r(A)}(q)$) le polynôme énumérateur des inversions de l'ensemble d'arborescences $C_r(A)$ (resp. $C^r(A)$). Comme dans le paragraphe précédent, on s'intéresse d'abord aux classes d'équivalence pour l'échange r-contraint.

Lemme 5. *Soit A une arborescence sur $[n]$ de racine n et $B = Dec^n(A)$. $\mathcal{P}_{C^n(A)}(-1) = 0$ si B est une arborescence décroissante paire et $\mathcal{P}_{C^n(A)}(-1) = (-1)^{inv(B)}$ sinon.*

Preuve. Dans [14], Pansiot établit une involution ψ sur les arborescences de racine n non décroissantes paires telle que A et $\psi(A)$ diffèrent par un échange n-contraint ($inv(A)$ et $inv(\psi(A))$ n'ont donc pas même parité). Pour toute arborescence de racine n, la classe $C^n(A)$ contenant au plus une arborescence décroissante (Lemme 3), le Lemme est une conséquence directe du résultat de Pansiot. □

Lemme 6. *Soient $l \in [n]$, A une arborescence sur $[n]$ de racine l et $B = Dec^l(A)$. $\mathcal{P}_{C^l(A)}(-1) = \mathcal{P}_{C^n(A)}(-1) \times (|B|_{\geq l} \mod 2)$.*

Preuve. On note D_i la classe des arborescences de $C^l(A)$ de racine i (pour $i = l, \cdots ,n$). On a alors $D_n = C^n(B)$ et on construit D_i à partir de D_{i+1} en échangeant les sommets i et $i+1$ dans toutes les arborescences de D_{i+1}. Par construction des D_i, on vérifie immédiatement que $\mathcal{P}_{D_i}(-1) = -\mathcal{P}_{D_{i+1}}(-1)$. Le Lemme découle alors du fait que $\mathcal{P}_{C^l(A)}(-1) = \sum_{i=l}^{n} \mathcal{P}_{D_i}(-1)$. □

Lemme 7. *Soit $A \in \mathcal{A}_{n,r}$. $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 1$ si $Dec_r(A) \in \mathcal{B}_{n,r}$ et $P_{C_r(A)}(-1) = 0$ sinon.*

Preuve. Soient $x_1, \cdots ,x_k$ les fils de r dans $Dec_r(A)$ et $A'_1, \cdots ,A'_k$ les sous-arborescences de $Dec_r(A)$ de racines respectives $x_1, \cdots ,x_k$. On note D_i (resp. D'_i) l'ensemble d'arborescences $C^r(A'_i)$ (resp. $C^{x_i}(A'_i)$). Comme toutes les arborescences de $C_r(A)$ ont même racine r, et qu'on ne fait pas d'échange impliquant r, et comme pour tout $i \in [k]$ $|\mathcal{P}_{C^r(A'_i)}(-1)| \leq 1$ (conséquence des Lemmes 5 et 6),

$$\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = (-1)^{r-1} \times \prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_{C^r(A'_i)}(-1)$$

ou de manière équivalente (Lemme 6)

$$\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = (-1)^{r-1} \times \left(\prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_{C^{x_i}(A'_i)}(-1) \times (|A'_i|_{\geq r} \mod 2) \right),$$

ce qui est aussi équivalent à

$$\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = (-1)^{inv(Dec^r(A))} \times \left(\prod_{i=1}^{k} |\mathcal{P}_{C^{x_i}(A'_i)}(-1)| \times (|A'_i|_{\geq r} \mod 2) \right), \tag{20}$$

On a donc $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 0$ si et seulement si il existe $i \in [k]$ tel que $\mathcal{P}_{C^{x_i}(A'_i)}(-1) = 0$ ou $(|A'_i|_{\geq r} \mod 2) = 0$, ce qui est équivalent à dire que $Dec_r(A) \notin \mathcal{B}_{n,r}$. Donc si $Dec_r(A) \in \mathcal{B}_{n,r}$ on a $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 1$ ou $P_{C_r(A)}(-1) = -1$, et si $Dec_r(A) \notin \mathcal{B}_{n,r}$ on a $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 0$. Or si $Dec_r(A) \in \mathcal{B}_{n,r}$, par définition de $\mathcal{B}_{n,r}$, pour tout i A'_i est une arborescence décroissante paire. Donc, par le Lemme 5, qui permet d'affirmer que pour tout i, $|\mathcal{P}_{C^{x_i}(A'_i)}(-1)| = 1$, et le Lemme 1, qui permet d'affirmer que $inv(Dec_r(A))$ est pair, on a bien $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 1$. □

Ceci conclut la preuve de la Proposition 7, qui est une conséquence des Lemmes 2, 4 et 6.

Extended abstract

In this paper, we investigate some combinatorial properties of the inversions enumerator polynomial for the family of labelled rooted trees such that the root's label is lower than that of its sons. An *inversion* in a rooted tree is a pair (x, y) of vertices such that x is an ancestor of y and $x > y$. For a tree A, we denote by $inv(A)$ the number of inversions of T. The inversion polynomial of a set $\mathcal{K}_n$ of rooted trees having n vertices, denoted by $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_n}(q)$, is defined by

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}_n}(q) = \sum_{A \in \mathcal{K}_n} q^{inv(A)}.$$

The inversion polynomial for the family of trees having the root labelled 1, denoted by $\mathcal{P}_n(q)$, was introduced by Mallows and Riordan [11] and studied in particular by Kreweras [9]. They are related to many combinatorial objects like the Tutte polynomial for some families of graphs [6], parking functions [20], the external activity of a rooted tree [2] or the enumeration of regions of some hyperplanes arrangements [18, 17]. Mallows and Riordan [11], and later Kreweras [9], give in particular a recurrence formula for these polynomials (Proposition 1). Moreover, Kreweras show that the values of $\mathcal{P}_n(q)$ at $q = 0,\ 1,\ 2$ and -1 are related to well known numbers (at least from a combinatorial point of view), especially the Euler numbers (Définition 2) and the number of simple, connected labelled graphs. These results are summarized in Propositions 2 and 3, where $\mathcal{G}_n$ is the set of labelled connected graphs on $[n]$ having no loop or multiple edges, $g_n = |\mathcal{G}_n|$ and, for a graph $G \in \mathcal{G}_n$, $a(G)$ is the number of edges of this graph. In [8] Gessel and Wang give a bijective proof of the results of Proposition 3 based on the depth-first search in a graph.

Here we are interested in the inversion polynomial of the family of trees such that *the root has no lower son*, introduced in [3] and which appears also in a work of Gessel, still unpublished but cited in [1], on the enumeration of regions in some hyperplanes arrangements. We denote by $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(q)$ the inversion polynomial of the rooted trees on $[n]$ such that the root is labelled r and has no lower son (we denote by $\mathcal{A}_{n,r}$ the family of such trees having n vertices). We propose generalizations, for this polynomial, of the previously cited results (if we put $r = 1$ in our results, we have the results of Kreweras).

We give the following recurrence formula for $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(q)$ (Proposition 4):

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{P}}_{r,r}(q) &= \begin{cases} 1 \text{ if } r = 1, \\ 0 \text{ otherwise,} \end{cases} \\
\hat{\mathcal{P}}_{n+1,r}(q) &= \sum_{m=1}^{n+1-r} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n-r-1}{m-1} \binom{r-1}{k} \left(q^{2k} \sum_{i=0}^{m-1} q^i \right) \hat{\mathcal{P}}_{k+m,1}(q) \hat{\mathcal{P}}_{n',r'}(q),
\end{aligned}$$

where $n' = (n + 1 - m - k)$ and $r' = (r - k)$.

Moreover, we give combinatorial proofs for the evaluation of $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(q)$ with $q = 0,\ 1$ and 2 (Propositions 5 and 6):

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(0) &= \begin{cases} (n-1)! \text{ if } r = 1, \\ 0 \text{ otherwise,} \end{cases}, \\
\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(1) &= (n-r)n^{n-r-1}(n-1)^{r-2}, \\
\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(2) &= 2^{2(r-1)} g_{n,r}, \\
\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(1+q) &= (1+q)^{2(r-1)} \sum_{G \in \mathcal{G}_{n,r}} q^{a(G)-n+1}, \qquad (21)
\end{aligned}$$

where $\mathcal{G}_{n,r}$ is the set of simple labelled graphs on $[n]$ such that the vertex r has no lower neighbour and $g_{n,r} = |\mathcal{G}_{n,r}|$.

Finally, in the last section, which is the main part of this paper, we relate $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(-1)$ to the Entringer numbers [5], a family of numbers which refines the Euler numbers (Définition 4 and Proposition 7). Our combinatorial proof of this result is based on a non trivial extension of a method used by Pansiot [14] to relate $\mathcal{P}_n(-1)$ to the Euler numbers, and we divide it into three steps:

(1) first we define a subset $\mathcal{B}_{n,r}$ of $\mathcal{A}_{n,r}$ having cardinality $e_{n,r}$ (Lemme 2) and such that each tree of this subset has an even number of inversions (Lemme 1),

(2) next, we divide $\mathcal{A}_{n,r}$ into subsets $C_1, \cdots, C_l$ such that for $i = 1, \cdots, l$, C_i contains at most one tree belonging to $\mathcal{B}_{n,r}$ (hence we have $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(-1) = \sum_{i=1}^{l} \mathcal{P}_{C_i}(-1)$),

(3) finally, we show that $\mathcal{P}_{C_i}(-1) = 1$ if C_i contains a tree belonging to $\mathcal{B}_{n,r}$ and $\mathcal{P}_{C_i}(-1) = 0$ else (Lemme 7), which proves Proposition 7.

Références

[1] Athanasiadis (C.) et Linusson (S.). – A simple bijection for the regions of the Shi arrangement of hyperplans. *Discrete Math.*, vol. 204, n° 1-3, 1999, pp. 27–39.

[2] Beissinger (J. S.). – On external activity and inversions in trees. *J. Combin. Theory Ser. B*, vol. 33, n° 1, 1982, pp. 87–92.

[3] Chauve (C.), Dulucq (S.) et Guibert (O.). – Enumeration of some labelled trees. *In : Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, FPSAC'00*, éd. par Krob (D.), Mikhalev (A. A.) et Mikhalev (A. V.). pp. 146–157. – Springer.

[4] Chen (W. Y. C.). – The pessimistic search and the straightening involution for trees. *European J. Combin.*, vol. 19, n° 5, 1998, pp. 553–558.

[5] Entringer (R. C.). – A combinatorial interpretation of the Euler and Bernoulli numbers. *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, vol. 14, 1966, pp. 241–246.

[6] Gessel (I. M.) et Sagan (B. E.). – The Tutte polynomial of a graph, depth-first search, and simplicial complex partitions. *Electron. J. Combin.*, vol. 3, n° 2, 1996. – Research Paper 9, 36 pp.

[7] Gessel (I. M.), Sagan (B. E.) et Yeh (Y. N.). – Enumeration of trees by inversions. *J. Graph Theory*, vol. 19, n° 4, 1995, pp. 435–459.

[8] Gessel (I. M.) et Wang (D. L.). – Depth-first search as a combinatorial correspondence. *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 26, n° 3, 1979, pp. 308–313.

[9] Kreweras (G.). – Une famille de polynômes ayant plusieurs propriétés énumératives. *Period. Math. Hungar.*, vol. 11, n° 4, 1980, pp. 309–320.

[10] Kuznetsov (A. G.), Pak (I.) et Postnikov (A.). – Increasing trees and alternating permutations. *Russian Math. Survey*, vol. 49, 1994, pp. 79–110.

[11] Mallows (C. L.) et Riordan (J.). – The inversion enumerator for labeled trees. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 74, 1968, pp. 92–94.

[12] Moon (J. W.). – *Counting labelled trees.* – Montréal, Canadian Mathematical Congress, 1970, *Canadian Mathematical Monographs*, volume 1.

[13] Moszkowski (P.). – Arbres et suites majeures. *Period. Math. Hungar.*, vol. 20, n° 2, 1989, pp. 147–154.

[14] Pansiot (J.-J.). – Nombres d'Euler et inversions dans les arbres. *European J. Combin.*, vol. 3, n° 3, 1982, pp. 259–262.

[15] Poupard (C.). – De nouvelles significations énumératives des nombres d'Entringer. *Discrete Math.*, vol. 38, n° 2-3, 1982, pp. 265–271.

[16] Poupard (C.). – Deux propriétés des arbres binaires ordonnés stricts. *European J. Combin.*, vol. 10, n° 4, 1989, pp. 369–374.

[17] Stanley (R. P.). – Hyperplane arrangements, interval orders, and trees. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 93, n° 6, 1996, pp. 2620–2625.

[18] Stanley (R. P.). – Hyperplane arrangements, parking functions and tree inversions. *In : Mathematical essays in honor of Gian-Carlo Rota.* pp. 359–375. – Birkhäuser.

[19] Viennot (G.). – Une interprétation combinatoire des coefficients des développements en série entière des fonctions elliptiques de Jacobi. *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 29, n° 2, 1980, pp. 121–133.

[20] Yan (C. H.). – Generalized tree inversions and k-parking functions. *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 79, n° 2, 1997, pp. 268–280.

E-mail address: `[chauve,duchon,dulucq]@labri.u-bordeaux.fr`

LaBRI, Université Bordeaux I, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence, France