Une bijection entre tableaux gauches et tableaux oscillants gauches

Cedric Chauve

LaBRI, Université de Bordeaux I

Unpublished notes, 1997.

UNE BIJECTION ENTRE TABLEAUX GAUCHES ET TABLEAUX OSCILLANTS GAUCHES

CEDRIC CHAUVE

Résumé. Dans [2], Favreau décrit une bijection entre les tableaux oscillants de hauteur bornée et de forme finale en ligne et les tableaux standard de hauteur bornée. Nous étendons cette bijection au cas des tableaux oscillants gauches et des tableaux gauches.

1. Notations

Ce document reprend essentiellement les notations introduites dans [1], à quelques exceptions près, présentées dans cette section.

Insertion par ligne et insertion par colonne. A côté de la procédure d'insertion externe, Schensted ([4]) a défini la procédure d'insertion par colonne, que nous notons $ColonneIns$. De même il a introduit la notion de suppression par colonne, que nous notons $ColonneSup$. Par exemple, soit P le tableau standard suivant,

$$\begin{array}{|c|cc} \hline 8 \\ \cline{1-1} 5 \\ \cline{1-1} 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{|c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{6} \\ \hline \end{array}$$

Si $P' = ColonneIns(P, 4)$ et $P'' = ColonneSup(P, 6)$, alors

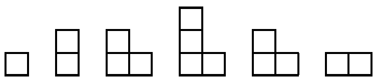
$$P' = \begin{array}{|c|c|c|} \cline{1-1} 8 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-2} 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \qquad P'' = \begin{array}{|c|c|} \cline{1-1} 8 \\ \cline{1-1} 5 \\ \cline{1-1} 3 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Dans ce document, nous notons chacun des algorithmes introduits dans [1] (utilisant l'insertion par ligne) en leur adjoignant l'exposant L (par exemple RS_S^L, Φ_O^L), et nous notons les versions de ces algorithmes utilisant l'insertion par colonne avec un exposant C (par exemple RS_S^C, Φ_O^C).

Tableaux selon leur longeur, hauteur et forme finale. On note (c) un diagramme de Ferrers comportant une seule ligne de c cellules.

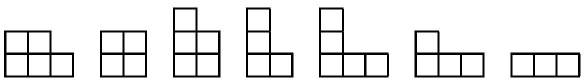
Définition 1. *On note $OT_n^k((c))$ l'ensemble des tableaux oscillants de forme finale (c), de longueur $n = 2n' + c$ et de hauteur exacte k (hauteur de la "bande" dans laquelle ces tableaux oscillants évoluent). Le nombre de tableaux oscillants de $OT_n^k((c))$ est noté $\tilde{f}_{n,k}^{(c)}$.*

Par exemple, on a

$\emptyset$  $\in OT_6^3((2))$

Définition 2. *On note $SOT_n^k(\alpha \to (c))$ l'ensemble des tableaux oscillants gauches de forme initiale α, de forme finale (c), de longueur n et de hauteur exacte k. Le nombre de tableaux oscillants gauches de $SOT_n^k(\alpha \to (c))$ est noté $\tilde{f}_{n,k}^{\alpha \to (c)}$.*

Par exemple, on a

 $\in OT_6^3(\alpha \to (3))$

α

Définition 3. *On note $ST^k(\lambda/\alpha)$ l'ensemble des tableaux gauches de forme λ/α et de hauteur k. On note $f_k^{\lambda/\alpha}$ le nombre de tableaux gauches de forme λ/α et de hauteur k.*

Définition 4. *On note $ST_c^k(\lambda/\alpha)$ l'ensemble des tableaux gauches de forme λ/α , ayant c colonnes impaires et de hauteur k. On note $f_{c,k}^{\lambda/\alpha}$ le nombre de tableaux gauches de forme λ/α, ayant c colonnes impaires et de hauteur k.*

2. Tableaux oscillants

Nous présentons maintenant un résultat portant sur le nombre de tableaux oscillants selon leur hauteur, forme finale et longueur.

Théorème 1 ([2]). *Soit n, k et c des entiers fixés tels que $n \geq c$. Il existe une bijection*

$$\Psi_O \ : OT_n^k((c)) \longrightarrow \bigcup_{\lambda \vdash n} (ST_c^{2k}(\lambda) \cup ST_c^{2k-1}(\lambda))$$

$$T \longmapsto P$$

Corollaire 1 ([2]).

$$\tilde{f}_{n,k}^{(c)} = \sum_{\lambda \vdash n} (f_{c,2k}^{\lambda} + f_{c,2k-1}^{\lambda})$$

Corollaire 2 ([2]).

$$\tilde{f}_{n,\leq k}^{(c)} = \sum_{\lambda \vdash n} f_{c,\leq 2k}^{\lambda}$$

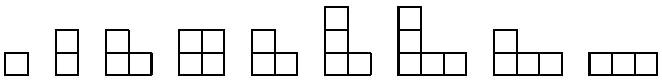
En s'appuyant sur certains travaux, notamment [3], on obtient alors les résultats suivants.

Corollaire 3 ([2]). *Le nombre de tableaux oscillants de longueur n, évoluant dans une bande de hauteur au plus k et de forme finale en ligne, $\tilde{f}_{n,\leq k}$ est, pour $k = 1, 2$*

$$\tilde{f}_{n,\leq 1} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$
$$\tilde{f}_{2n,\leq 2} = C_n C_{n+1}$$
$$\tilde{f}_{2n+1,\leq 2} = C_{n+1} C_{n+1}$$

où $C_n = 2n!/n!(n+1)!$ est le $n^{ème}$ nombre de Catalan.

Nous présentons maintenant la bijection Ψ_O. Nous la décomposons en trois étapes. Nous illustrons cette construction au fur et à mesure avec un exemple. Soit $T \in OT_n^k((c))$, avec $n = 2n' + c$. Par exemple

$T = \emptyset$ 

Etape 1 : $T \longleftrightarrow \pi_1$. Etant donné le tableau oscillant, on lui fait correspondre, par $(\Phi_O^L)^{-1}$, le couple (π_1', F) où π_1' est une involution sans point fixe sur $[n]$ (comportant n' cycles) et F un ensemble de c entiers rangés par ordre croissant (en fait F est un tableau partiel d'une seule ligne comportant c cellules, ce qu'on transforme naturellement en un ensemble d'entiers rangés par orde croissant) : $F = (f_1, f_2, \ldots, f_c)$. On voit donc que les éléments de π_1' appartiennent à $[n]/F$. Etant donné (π_1', F), on définit l'involution partielle π_1 comme suit, $\pi_1 = \pi_1' \cup \binom{n+j}{f_{c-j+1}} : \ 1 \leq j \leq c$

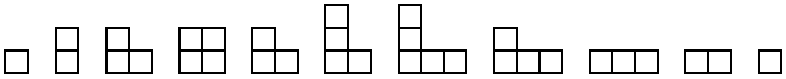
On voit immédiatement que si π_1 est en bijection, par RS_O^L avec le tableau oscillant P_1, T_1 est en fait T auquel on rajoute les étapes correspondant à la destruction de (c).

Reprenons le tableau oscillant T précédent. On a

$$\pi_1' = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, F = (2,\ 6,\ 7)$$

et donc

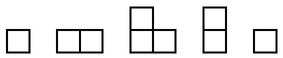
$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$T_1 = \emptyset$  $\emptyset$

Etape 2 : $\pi_1 \longleftrightarrow \pi_2$**.** On suppose la valeur de c connue, ce qui étant donnée π_1 permet de retrouver le couple (π_1', F). Dans un premier temps, à π_1' on fait correspondre, par RS_O^L un tableau oscillant T', de forme finale $\emptyset$ et de longueur $2n'$. Dans un deuxième temps, à T', on fait correspondre, par $(RS_O^C)^{-1}$, une involution partielle π_2' comportant n' cycles (on rappelle que $n = 2n' + c$) et dont les éléments sont dans $[n]/F$. Finalement, on a $\pi_2 = \pi_2' \cup F$ (F représente les points fixes de π_2). Poursuivons notre exemple. L'application de $RS_O^L(\pi_1)$ produit successivement les tableaux suivants,

$$T_6' = \emptyset \; T_5' = \begin{array}{|c|}\hline 4\\\hline\end{array} \quad T_4' = \begin{array}{|c|}\hline 4\\\hline 1\\\hline\end{array} \quad T_3' = \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 4 \\ \hline 1 & 3\\\hline\end{array} \quad T_2' = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\\hline\end{array} \quad T_1' = \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array} \quad T_0' = \emptyset$$

et donc

$T' = \emptyset$  $\emptyset$

$(RS_O^C)^{-1}(T')$ produit alors le résultat suivant,

$$\begin{array}{cccccccc}
i = & 0 & 1 & 3 & 4 & 5 & 8 & 9 \\
T_i' = & \emptyset & \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array} & \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\\hline\end{array} & \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 4 \\ \hline 1 & 3\\\hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 4\\\hline 3\\\hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline\end{array} & \emptyset \\
\pi_2' = & \emptyset & & & & \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{array}$$

On a donc $\pi_2 = 5\ 2\ 9\ 8\ 1\ 6\ 7\ 4\ 3$. On note cette étape $\mu : \pi_2 = \mu(\pi_1)$.

Etape 3 : $\pi_2 \longleftrightarrow P$**.** Pour cela, on utilise la Robinson-Schensted correspondence pour les tableaux standard classique (RS_S^L). Dans notre exemple,

$$P = \begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-1} 9 \\ \cline{1-1} 8 \\ \cline{1-2} 5 & 6 \\ \cline{1-2} 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline\end{array}$$

et on vérifie bien que P est de taille n, a c colonnes impaires et est de hauteur $2k - 1$.

3. Tableaux oscillants gauches

Tout d'abord un petit rappel. De [4] on peut tirer le résultat suivant,

Lemme 1. *Soit σ une permutation de S_n. Le P-tableau de σ par RS_S^L est le tableau P si et seulement si le P-tableau de σ par RS_S^C est le tableau $P' = P^*$, c'est à dire le conjugué de P.*

Par exemple, si $\sigma = 1\ 3\ 6\ 2\ 5\ 7\ 4$, on a alors

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|}\cline{1-1} 6 \\ \cline{1-2} 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 7 \\ \hline\end{array} \quad \text{et } P' = \begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-1} 7 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-2} 2 & 5 \\ \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline\end{array} = P^*$$

Nous étendons maintenant partiellement le résultat de Favreau au cas des tableaux oscillants gauches, en donnant une borne supérieure au nombre de tableaux oscillants gauches de formes initiale et finale, longueur et hauteur exacte données.

Pour cela, nous considérons un tableau oscillant gauche P comme un tableau oscillant, en utilisant $cpl(P)$.

Proposition 1. *Soient $T \in OT_n^k((c))$, $P = \Psi_O(T)$ et α un diagramme de Ferrers.*

(1) *Si T commence par C_α alors $P_\alpha \subseteq P$.*

(2) *Si $\alpha = (d)$ et que $P_\alpha \subseteq P$ alors T commence par C_α.*

Exemple 1. Reprenons l'exemple du paragraphe précédent. On remarque que

$$\alpha = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \text{et } P_\alpha = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \subset P = \begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-1} 9 \\ \cline{1-1} 8 \\ \cline{1-2} 5 & 6 \\ \cline{1-2} 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline \end{array}$$

Pour prouver ce résultat, nous commençons par montrer trois lemmes.

Lemme 2. *Soient π une involution sans point fixe sur $[2n]$ et $T_0, T_1, \dots T_{2n}$ les tableaux engendrés par $RS_O^L(\pi)$. Pour tout i appartenant à $[2n]$, on peut dire que si les étiquettes de T_i sont les entiers $\{t_{i1}, \dots, t_{ik}\}$, alors la sous-suite de $\breve{\pi}$ constituée de $\{t_{i1}, \dots, t_{ik}\}$, notée σ_i, est telle que T_i est le P-tableaude σ_i^* par RS_S^L ($P(\sigma_i^*) = T_i$).*

Preuve. Pour prouver ce résultat, on utilise une récurrence descendante sur i.
Si $i = 2n$, alors $T_{2n} = \emptyset$, et le résultat est donc bien vérifié.
Supposons-le vrai pour $i = m$, avec $2n \geq m > 0$ et démontrons-le pour $i = m - 1$. Deux situations peuvent se présenter :

- On passe de T_m à T_{m-1} en enlevant une cellule (la cellule étiquetée m). On a donc $\sigma_{m-1} = \sigma_m/\{m\}$ (σ privée de m), et par conséquent, $P(\sigma_{m-1}^*) = P(\sigma_m^*)/\{m\}$. Par hypothèse de récurrence, $P(\sigma_m^*) = T_m$. Comme $T_m/\{m\} = T_{m-1}$, on a $P(\sigma_{m-1}^*) = T_{m-1}$.
- On passe de T_m à T_{m-1} en rajoutant une cellule par l'insertion de l'étiquette l, qui est donc en première ligne de T_m, et apparaît dans $\breve{\pi}$ avant toutes les autres étiquettes de T_m. On a donc $\sigma_{m-1} = l.\sigma_m$ et ainsi $\sigma_{m-1}^* = \sigma_m^*.l$. Par hypothèse de récurrence, $P(\sigma_m^*) = T_m$, et donc $P(\sigma_{m-1}^*) = T_{m-1}$.

□

Remarque 1. On étend naturellement ce résultat au cas où on utilise l'insertion colonne, c'est à dire RS_S^C et RS_O^C.

Lemme 3. *Soient T un tableau oscillant de forme finale $\emptyset$ et de longueur $2n$, π une involution sans point fixe sur $[2n]$ telle que $RS_O^L(\pi) = T$, et α un diagramme de Ferrers. Alors, T commence par C_α si et seulement si $\breve{\pi}$ contient une sous-suite $\sigma \in S_k$ telle que $\sigma^* \simeq_K \sigma_\alpha$.*

Preuve. Soit $T_0, T_1, \dots T_{2n}$ les tableaux construits par $RS_O^L(\pi)$. Si T commence par C_α et $\alpha \vdash k$, on a alors $T_k = P_\alpha$, et par le Lemme 2, $\breve{\pi}$ contient une sous-suite $\sigma \in S_k$ telle que $P(\sigma^*) = P_\alpha$, et donc $\sigma^* \simeq_K \sigma_\alpha$.
Réciproquement, supposons que $\breve{\pi}$ possède une sous-suite $\sigma \in S_k$ telle que $\sigma^* \simeq_K \sigma_\alpha$. On en déduit immédiatement que les k premières étapes de T sont des insertions de cellules (et donc T_k contient les étiquettes $\{1, \dots, k\}$. Supposons que $T_k \neq P_\alpha$. Par le Lemme 2, comme $P(\sigma^*) = T_k$, on a $\sigma^* \not\simeq_K \sigma_\alpha$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. On a donc $T_k = P_\alpha$ et donc T commence par C_α. □

Lemme 4. *Soient (P, Q) et (P', Q') deux couples de tableaux standard de tailles respectives n et $n' \leq n$, π et π' deux permutations de S_n et $S_{n'}$ telles que $RS_S^L(\pi) = (P, Q)$ et $RS_S^L(\pi') = (P', Q')$. Alors, $P' \subseteq P$ si et seulement si π possède une sous-suite $\sigma \in S_{n'}$ telle que $\sigma \simeq_K \pi'$.*

Preuve. On utilise une induction sur $k = n - n'$.
Si $k = 0$, alors $n = n'$ et donc $\sigma = \pi$. $P' \subseteq P \iff P' = P$, ce qui entraine (Classes de Knuth) que $P' \subseteq P \iff \pi \simeq_K \pi'$.
Supposons le résultat vrai pour $k = m$, $m \geq 0$. Soit $k = m + 1$. On a donc $P' \neq P$. Posons $P_1 = P/n$ (c'est à dire, P privé de la cellule étiquetée n). Comme $k > 0$, on a donc $P' \subseteq P \iff P' \subseteq P_1$. Posons $\pi_1 = \pi/n$ (π privée de n). Il est clair que le P-tableau de π_1 est P_1. Par induction, on a donc que $P' \subseteq P_1$ si et seulement si π_1 possède une sous-suite $\sigma \simeq_K \pi'$. Par définition de π_1, tout sous-suite de π_1 est une sous-suite de π. Donc $P' \subseteq P_1$ si et seulement si π possède une sous-suite $\sigma \simeq_K \pi'$. □

Preuve de la Proposition 1. Soit $T \in OT_n^k((c))$, et α un diagramme de Ferrers. Par l'étape 1, T donne le couple (π_1, F) (équivalent à une permutation π_1) qui, par l'étape 2 donne une involution π_2, elle-même en bijection, par l'étape 3, avec un tableau standard P.
Dans un premier temps, nous démontrons le premier point de la Proposition. On a donc T commençant par C_α. On suppose que $\alpha \vdash d$.

- **Etape 1**
  Par définition de l'étape 1 de la bijection Ψ_O et par le Lemme 3, on a donc que $\breve{\pi}_1$ contient une sous-suite σ_1 telle que $\sigma_1^* \simeq_K \sigma_\alpha$.
- **Etape 2**
  Examinons maintenant l'étape 2. On a π_1 qui est une involution partielle sur $[n+c]$ et $\pi_2 = \mu(\pi_1)$. On cherche à montrer que si $\breve{\pi}_1$ contient une sous-suite σ_1 telle que $\sigma_1^* \simeq_K \sigma_\alpha$, alors π_2 contient une sous-suite σ_2 telle que $\sigma_2 \simeq_K \sigma_\alpha$. Dans notre exemple, nous avons $\alpha = (2,2)$ et donc $\sigma_\alpha = 2\ 1\ 4\ 3$, ainsi que
  $$\pi_1' = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad F = (2,\ 6,\ 7) \text{ et donc } \sigma_1 = 3\ 1\ 4\ 2$$
  $$\pi_2 = 5\ 2\ 9\ 8\ 1\ 6\ 7\ 4\ 3 \text{ et donc } \sigma_2 = 2\ 1\ 4\ 3$$
  On vérifie bien que $\sigma_1^* \simeq_K \sigma_\alpha$ et que $\sigma_2 \simeq_K \sigma_\alpha$.
  Par définition de l'étape 1, on associe à π_1 le couple (π_1', F). On a donc $\sigma_1 = \sigma_{1D}.\sigma_{1F}$, avec les éléments de σ_{1F} provenant de F (2 dans notre exemple) et ceux de σ_{1D} provenant de $\breve{\pi}_1'$ (3 1 4 dans notre exemple). Soient $T' = RS_O^L(\pi_1')$ et T_i', $i = 0, 1, \ldots, 2n'$, les tableaux construits par cet algorithme. Si $\pi_2' = (RS_O^C)^{-1}(T')$, il est clair, par définition de RS_O^L et RS_O^C, que $\breve{\pi}_1'$ et $\breve{\pi}_2'$ contiennent les mêmes entiers. On note alors σ_{2D} la sous-suite de $\breve{\pi}_2'$ contenant les mêmes éléments que σ_{1D} (1 4 3 dans notre exemple). Si σ_{1D} comporte k entiers (appartenant à $[d]$), alors T' commence par k insertions et T_k' a pour étiquettes les k entiers de σ_{1D}. Par le Lemme 3, on peut alors affirmer que T_k' est le P-tableau de ${\sigma_1}_D^*$ par RS_S^L et le P-tableau de ${\sigma_2}_D^*$ par RS_S^C, et donc, par le Lemme 1, que le P-tableau de ${\sigma_2}_D^*$ par RS_S^L est ${T_k'}^*$. D'où $\sigma_{2D} \simeq_K {\sigma_1}_D^*$. Dans un deuxième temps, on peut constater que comme $\alpha \vdash d$, tous les éléments de σ_α contenus dans π_2' ont une image strictement supérieurs à l. Donc, par définition de l'étape 2, si σ_2 est la sous-suite de π_2 contenant les éléments de σ_α, alors $\sigma_2 = {\sigma_1}_F^*.\sigma_{2D}$. On a donc $\sigma_2 \simeq_K {\sigma_1}_F^*.{\sigma_1}_D^*$ et ainsi $\sigma_2 \simeq_K \sigma_1^*$. Comme $\sigma_1 \simeq_K \sigma_\alpha$, on a $\sigma_2 \simeq_K \sigma_\alpha$.
- **Etape 3**
  Pour finir, examinons l'étape 3. On note P le P-tableau, par RS_S^L de π_2. On vient donc de montrer que π_2 contenait une sous-suite σ_2 telle que $\sigma_2 \simeq_K \sigma_\alpha$. Par le Lemme 4, on en déduit que $P_\alpha \subseteq P$.

Démontrons maintenant le deuxième point de la Proposition. On pose donc $\alpha = (d)$ et $P_\alpha \subseteq P$.

- **Etape 3**
  Par définition de l'étape 3 de Φ_O et par le Lemme 4, on peut dire que π_2 contient une sous-suite $\sigma_2 \in S_d$ telle que $\sigma_2 \simeq_K \sigma_\alpha$.
- **Etape 2**
  Pour cette étape, on cherche à montrer que si π_2 contient une sous-suite σ_2 telle que $\sigma_2 \simeq_K \sigma_\alpha$, alors $\breve{\pi}_1$ contient une sous-suite σ_1 telle que $\sigma_1^* \simeq_K \sigma_\alpha$.
  Comme $\alpha = (d)$ on a donc $\sigma_\alpha = 1\ 2\ \ldots\ d$ et on peut donc en déduire les faits suivants :
  (1) Les éventuels éléments de σ_2 qui sont des points fixes de π_2 forment une sous-suite de σ_2, $\sigma_{2F} = 1\ 2\ \ldots d'$ $(d' \leq d)$.
  (2) Si on note $\sigma_{2D} = \sigma_2/\sigma_{2F}$ (σ_2 privée des éléments de σ_{2F}) ne peut avoir pour image un élément de σ_2.

  On a donc $\sigma_2 = \sigma_{2F}.\sigma_{2D}$.
  On note π_2' l'involution sans point fixe correspondant à π_2 privée des ses points fixes. Des remarques précédentes, on déduit que $\breve{\pi}_2'$ contient la sous-suite $\sigma_{2D} = d'+1\ d'+2\ \ldots d$.
  On note $T' = RS_O^C(\pi_2')$. On peut donc dire que T' commence par $d-d'$ insertions. On note maintenant $\pi_1' = (RS_O^L)^{-1}(T')$. Par le Lemme 3, on peut dire que $\breve{\pi}_1'$ contient une sous-suite notée σ_{1D}, telle que son P-tableau par RS_S^L est $T'_{d-d'}$, c'est à dire un tableau de Young formé d'une colonne de $d-d'$ cellules (étiquetées, de bas en haut, par les entiers $d'+1\ d'+2\ \ldots d$). On a donc $\sigma_{1D} = d\ d-1\ \ldots d'$ et ainsi ${\sigma_1}_D^* \simeq_K \sigma_{2D}$.

Si on note ${\pi_2}_F$ la sous-suite des points fixes de π_2, par définition de l'étape 2, on a alors $\breve{\pi}_1 = \breve{\pi}'_1.{\pi_2}^*_F$. Enfin, on note σ_1 la sous-suite de $\breve{\pi}_1$ contenant les éléments de σ_2. On a donc $\sigma_1 = {\sigma_1}_D.{\sigma_2}^*_F$ et donc $\sigma_1 \simeq_K \sigma_2^*$, ce qui permet de dire que $\sigma_1^* \simeq_K \sigma_\alpha$.

- **Etape 1**
  On a vu que π_1 est telle que $\breve{\pi}_1$ contient une sous-suite $\sigma_1 \simeq_K \sigma_\alpha^*$. Par le Lemme 3, on peut donc dire que T commence par C_α.

$\square$

Remarque 2. La réciproque du point 1 de cette proposition n'est pas toujours vraie. Par exemple, tout tableau oscillant T commençant par $\emptyset \ \square \ \emptyset$ est en bijection avec un tableau standard P de taille au moins 2. Il existe donc $\alpha = (2)$ ou $\alpha = (1,1)$, tel que $P_\alpha \subseteq P$, alors que T ne commence pas par C_α.

On en déduit alors le résultat suivant.

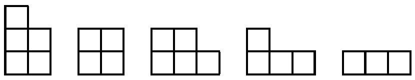
Théorème 2. *Soit n, k et c des entiers fixés, et α un diagramme de Ferrers de hauteur inférieur ou égale à k. Il existe une application*

$$\begin{aligned} \Psi_{OG} \ :SOT_n^k(\alpha \to (c)) &\longrightarrow \bigcup_{\lambda/\alpha \vdash n} (ST_c^{2k}(\lambda/\alpha) \cup ST_c^{2k-1}(\lambda/\alpha)) \\ T &\longmapsto P \end{aligned}$$

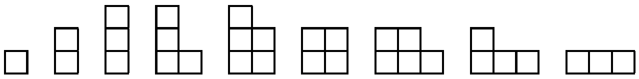
qui est seulement injective en général, mais bijective si $\alpha = (d)$.

Preuve. Ce résultat est une conséquence directe du Théorème 1 et de la Proposition 1. Etant donné un tableau oscillant gauche $T \in SOT_n^k(\alpha \to (c))$, on calcule le tableau standard $P_1 = \Psi_O(cpl(T))$. Par la Proposition 1, on a alors que $P_\alpha \subseteq P_1$. Pour obtenir $P = \Psi_{OG}(T)$, il suffit alors de "vider" la partie de P_1 de forme α et, si $\alpha \vdash d$, pour toutes les autres cellules, de soustraire d à leur étiquette. La Proposition 1 permet bien de dire que cette application est injective en général et bijective si $\alpha = (d)$. $\square$

Exemple 2. Soit T le tableau oscillant gauche suivant,

$T =$ 

On a alors

$cpl(T) = \emptyset$ 

et

$$\Psi_O(cpl(T)) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 \\ \cline{1-1} 6 \\ \cline{1-2} 3 & 9 \\ \cline{1-2} 2 & 5 \\ \hline 1 & 4 & 7 \\ \hline \end{array} \quad \text{et donc } \Psi_{OG}(T) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-2} & 4 \\ \cline{1-2} & \\ \hline & & 2 \\ \hline \end{array}$$

On peut alors énoncer le corollaire suivant.

Corollaire 4.

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n,k}^{\alpha \to (c)} &\leq \textstyle\sum_{\lambda/\alpha \vdash n} (f_{c,2k}^{\lambda/\alpha} + f_{c,2k-1}^{\lambda/\alpha}) \\ \tilde{f}_{n,k}^{(d) \to (c)} &= \textstyle\sum_{\lambda/(d) \vdash n} (f_{c,2k}^{\lambda/(d)} + f_{c,2k-1}^{\lambda/(d)}) \end{aligned}$$

Références

[1] Chauve (C.). – *Quelques nouvelles propriétés des tableaux oscillants.* – Mémoire de DEA, LaBRI, Université Bordeaux I, 1996.

[2] Favreau (L.). – *Combinatoire des tableaux oscillants et des polynômes de Bessel.* – Thèse de Doctorat, LaBRI, 1991.

[3] Gouyou-Beauchamps (D.). – Standard Young tableaux of height 4 and 5. *European J. Combin.*, vol. 10, n° 1, 1989, pp. 69–82.

[4] Schensted (C.). – Longest increasing and decreasing subsequences. *Canad. J. Math.*, vol. 13, 1961, pp. 179–191.

LaBRI, Université Bordeaux I, 351 cours de la Libération, 33405 Talence, France