Première partie

Énumération de structures arborescentes

Chapitre 1

Énumération d'arborescences

Dans cette première partie, nous considérons les arborescences d'un point de vue combinatoire, en nous attachant à *énumérer* plusieurs familles d'entre elles. Dans ce premier chapitre, nous présentons quelques résultats classiques sur ce sujet.

1.1 Définitions

Dans ce premier paragraphe, nous introduisons les définitions et notations nécessaires. On rappelle tout d'abord la définition la plus générale d'une arborescence.

> *Une arborescence à n sommets est un graphe connexe sans cycle ayant n sommets (et donc $(n-1)$ arêtes) dont on a distingué un sommet, appelé la racine.*

Définition 1. Une arborescence est dite *étiquetée* si chacun de ses sommets est muni d'une étiquette de sorte que l'ensemble des sommets est totalement ordonné. En général, on étiquette une arborescence à n sommets avec les entiers de 1 à n (on parle alors d'une arborescence sur $[n]$).

Notation. Sauf mention contraire, toutes les arborescences que nous considérons sont étiquetées et nous omettons donc de le préciser.

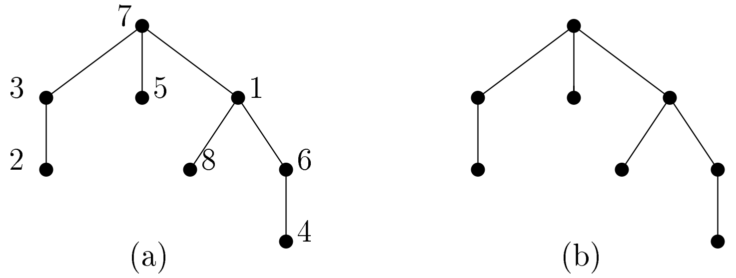


Fig. 1.1 – (a) Une arborescence étiquetée sur [8] - (b) Une arborescence non étiquetée

Dans la suite de cette partie, pour introduire la notion de *famille d'arborescences*, nous nous inspirons de la théorie des espèces de structures [16], développée par l'école montréalaise de combinatoire à la suite des travaux d'André Joyal [96], particulièrement adaptée à l'énumération de structures arborescentes.

Définition 2. Soit A une arborescence et x un sommet de A. On appelle *fibre de* x l'ensemble des fils de x.

Nous considérons diverses familles d'arborescences qui se distinguent par la *structure combinatoire (étiquetée) dont on munit la fibre de chaque sommet.*

Définition 3. Soit $\mathcal{F}$ une famille (ou classe) d'objets combinatoires étiquetés et $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des objets de $\mathcal{F}$ sur $[n]$. On appelle $\mathcal{F}$-arborescences l'ensemble des arborescences telles que pour tout sommet x, si sa fibre comporte n sommets, elle est munie d'une structure de $\mathcal{F}_n$ (on dit alors que la fibre de x est munie d'une $\mathcal{F}$-structure).

Par exemple, les familles d'arborescences les plus couramment étudiées dans la littérature sont

- les arborescences de Cayley, pour lesquelles seules comptent les relations d'adjacence entre sommets (la fibre de chaque sommet est munie d'une structure d'ensemble et il y a donc plusieurs façons de dessiner une arborescence de Cayley),
- les arborescences ordonnées, pour lesquelles les fils d'un sommet sont totalement ordonnés (la fibre de tout sommet est munie d'une structure de liste ordonnée).

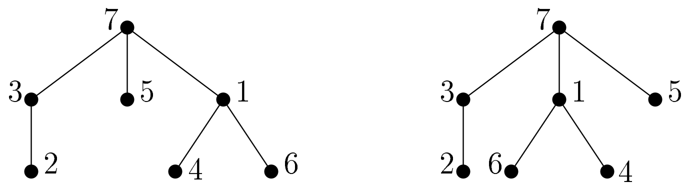


FIG. 1.2 – Deux arborescences ordonnées différentes, mais identiques si on les considère comme arborescences de Cayley

Notation. Nous notons $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{O}$) l'ensemble des arborescences de Cayley (resp. ordonnées), $\mathcal{A}_n$ (resp. $\mathcal{O}_n$) l'ensemble des arborescences de Cayley (resp. ordonnées) à n sommets et a_n (resp o_n) le nombre d'arborescences de Cayley (resp. ordonnées) à n sommets.

On peut bien entendu utiliser toute classe de structures combinatoires étiquetées pour définir une famille d'arborescences (rien n'interdit par exemple de munir la fibre d'un sommet d'une structure d'arborescence ordonnée binaire, structure que l'on retrouve dans diverses structures de données), ou d'utiliser diverses structures pour définir une famille d'arborescences (on peut par exemple munir la fibre des sommets pairs d'une structure de liste ordonnée et la fibre des sommets impairs d'une structure d'ensemble).

Notation. Les principales classes de structures que nous utilisons pour définir des familles d'arborescences sont celles d'ensemble, notée $\mathcal{E}$, celle de liste ordonnée, notée $\mathcal{L}$ et celle de liste circulairement ordonnée, notée $\mathcal{C}$. Les arborescences de Cayley sont donc les $\mathcal{E}$-arborescences et les arborescences ordonnées les $\mathcal{L}$-arborescences.

Définition 4. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles de structures combinatoires. On appelle $\mathcal{G}$-assemblée de $\mathcal{F}$-arborescences tout ensemble de $\mathcal{F}$-arborescences muni d'une $\mathcal{G}$-structure. Si les étiquettes des arborescences présentes dans une $\mathcal{G}$-assemblée sont deux à deux distinctes et correspondent à l'ensemble $[n]$, on parle alors de $\mathcal{G}$-assemblée de $\mathcal{F}$-arborescences sur $[n]$. On appelle *forêt* de $\mathcal{F}$-arborescences les $\mathcal{E}$-assemblées de $\mathcal{F}$-arborescences.

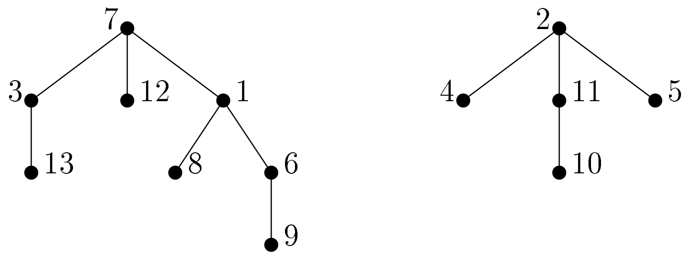


FIG. 1.3 – Une forêt à 13 sommets

Bien que la structure de la fibre des sommets soit la principale condition permettant de définir des familles d'arborescences, on peut bien entendu imposer d'autres conditions. Par exemple, on peut considérer des arborescences *croissantes* (pour tout sommet différent de la racine, son étiquette est supérieure à celle de son père) [41, 15, 132], des arborescences alternantes (chapitre 4), etc.

1.2 Énumération d'arborescences de Cayley

Le premier - et le plus fameux - résultat concernant l'énumération d'arborescences de Cayley est généralement attribué à Arthur Cayley [29] et donne une formule étonnement simple pour le nombre de telles arborescences à n sommets.

Théorème 5. *Le nombre d'arborescences de Cayley à n sommets est* n^{n-1}.

Il existe de nombreuses preuves du théorème 5 (voir notamment les travaux de Moon [119, 120] pour un récapitulatif des preuves connues à la fin des années 60, la preuve de Joyal [96] ou encore Shor [142] pour une nouvelle preuve récente). Dans cette section, nous présentons successivement deux preuves de ce résultat, qui illustrent deux approches différentes dans la résolution de problèmes d'énumération : l'approche bijective et l'approche formelle par la manipulation de séries génératrices.

1.2.1 L'approche bijective : le codage de Prüfer

Le principe de l'approche bijective est le suivant. Soit $\mathcal{F}$ une classe d'objets combinatoires dont on veut déterminer le cardinal $|\mathcal{F}|$ et $\mathcal{G}$ une autre classe d'objets combinatoires dont on connaît le cardinal. Si on peut décrire deux algorithmes $AlgoF$ et $AlgoG$ tels que

- $AlgoF$ transforme tout objet de $\mathcal{F}$ en un objet de $\mathcal{G}$,
- $AlgoG$ transforme tout objet de $\mathcal{G}$ en un objet de $\mathcal{F}$,
- pout tout objet $F \in \mathcal{F}$, $AlgoG(AlgoF(F)) = F$,
- pout tout objet $G \in \mathcal{G}$, $AlgoF(AlgoG(G)) = G$,

on a établi une bijection entre les ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, et on obtient alors une preuve du fait que $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}|$.

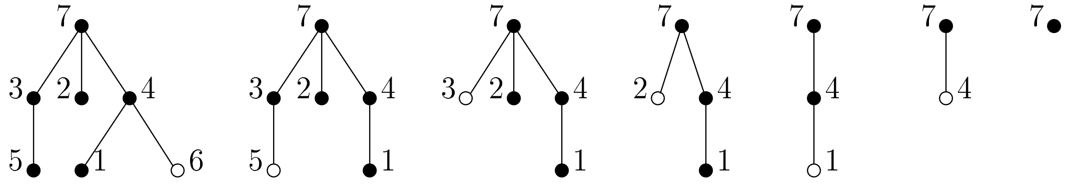
Le théorème 5 suggère l'existence d'une bijection entre les arborescences de Cayley à n sommets et les mots de longueur $(n-1)$ sur l'alphabet $[n]$. Dans [129] Prüfer propose une telle bijection, à la fois simple et élégante. Nous commençons par décrire cette bijection, puis nous montrons son intérêt pour affiner le résultat du théorème 5 et engendrer aléatoirement et uniformément des arborescences de Cayley.

Dans un premier temps, examinons la transformations des arborescences en mots. Soit A une arborescence de $\mathcal{A}_n$. On construit alors un mot m_A de $(n-1)$ lettres sur l'alphabet $[n]$ par l'algorithme suivant.

Algorithme 1: Codage de Prüfer : des arborescences vers les mots

Données : $A \in \mathcal{A}_n$
Résultat : m_A : mot de $(n-1)$ lettres sur l'alphabet $[n]$
début
  $m_A := \epsilon$ (le mot vide);
  tant que A n'est pas réduite à sa racine **faire**
    soit x la plus grande feuille de A et y le père de x;
    $m_A := m_A.y$ (ajouter y à la fin de m_A);
    supprimer le sommet x et l'arête (y,x) de A;
  retourner m_A
fin

Dans la figure suivante, nous donnons un exemple détaillé d'exécution de cet algorithme. À chaque étape, la plus grande feuille (qui sera retirée de A) est indiquée par un sommet blanc.



m_A : 4 4.3 4.3.7 4.3.7.7 4.3.7.7.4 4.3.7.7.4.7

En raisonnant par induction sur le nombre de sommets de A, on vérifie immédiatement que deux arborescences de Cayley différentes ne peuvent donner le même mot. De plus, par construction, on vérifie les propriétés suivantes.

Propriété 6. La dernière lettre de m_A est la racine de A.

Propriété 7. La lettre x apparaît k fois dans m_A si et seulement si le sommet x a k fils dans A. En particulier, les feuilles de A n'apparaissent pas dans m_A.

Ces deux propriétés prouvent alors que l'algorithme 2 que nous donnons ci-dessous, est bien l'inverse du précédent et reconstruit l'arborescence A à partir du mot m_A.

Il n'est pas difficile de vérifier que cet algorithme produit toujours une arborescence et que deux mots ne peuvent donner la même arborescence, ce qui établit la bijection entre mots et arborescences, et par conséquent le théorème 5.

Un des intérêts des preuves bijectives réside dans le fait qu'elles impliquent souvent une meilleure compréhension de la structure des objets que l'on compte et qu'elles permettent

Algorithme 2: Codage de Prüfer : des mots vers les arborescences

Données : m : mot de $(n-1)$ lettres sur l'alphabet $[n]$
Résultat : $A_m \in \mathcal{A}_n$
début
  soient A_m la forêt vide et F l'ensemble des lettres de $[n]$ non présentes dans m;
  pour i allant de 1 à $(n-1)$ **faire**
    soient x le plus grand élément de F et y la première lettre de m;
    ajouter l'arête (y,x) à la forêt A_m;
    supprimer x de F et la première lettre (y donc) de m;
    si y n'apparaît plus dans m **alors** ajouter y à F;
  retourner A_m
fin

donc d'obtenir des raffinements de résultats d'énumération et des preuves élégantes de certaines identités combinatoires. Nous allons en voir maintenant quelques exemples.

Corollaire 8. *Soit $r \in [n]$. Le nombre d'arborescences de Cayley sur $[n]$ de racine r est n^{n-2}.*

Preuve. On déduit directement de la propriété 6 que, les arborescences de Cayley sur $[n]$ ayant pour racine $k \in [n]$ sont en bijection avec les mots de $(n-1)$ lettres sur l'alphabet $[n]$ dont la dernière lettre est r, d'où le résultat. □

Théorème 9. [44] *Le nombre d'arborescences de Cayley sur $[n]$ telles que la racine a d fils est*

$$n\binom{n-2}{d-1}\,(n-1)^{n-1-d}.$$

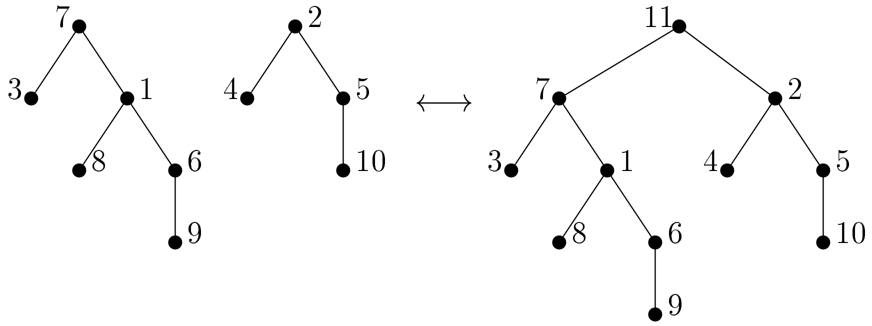
Preuve. Des propriétés 6 et 7, on déduit qu'une arborescence de Cayley A dont la racine possède exactement d fils correspond à un mot de longueur $(n-1)$ sur $[n]$ qui contient exactement d occurrences de sa dernière lettre et le résultat en découle. □

On peut déduire immédiatement du résultat précédent une formule pour le nombre de forêts d'arborescences de Cayley.

Théorème 10. *Le nombre de forêts de Cayley sur $[n]$ comportant k arborescences ($k > 0$) est*

$$\binom{n-1}{k-1}n^{n-k}. \tag{1.1}$$

Preuve. Une forêt de Cayley sur $[n]$ comportant k arborescences correspond à une arborescence de Cayley sur $[n+1]$ dont la racine $(n+1)$ a k fils :



Le résultat découle directement de la formule pour le nombre d'arborescences dont la racine a degré k. □

Le résultat de Cayley [29] est en fait le suivant (voir aussi Takács [154, 153] pour deux preuves récentes de ce résultat), que nous utiliserons dans le chapitre 2.

Théorème 11. *Soit* $\{r_1, \cdots, r_k\} \subset [n]$*. Le nombre de forêts de Cayley sur* $[n]$ *comportant* k *arborescences de racines respectives* $r_1, \cdots, r_k$ $(k > 0)$ *est*

$$k\ n^{n-k-1}.$$

Preuve. Ce résultat découle directement du théorème 10, en divisant (1.1) par $\binom{n}{k}$. □

Un autre intérêt des preuves bijectives réside dans leur application à la mise au point d'algorithmes de génération aléatoire de structures combinatoires, qui s'avèrent souvent utiles pour l'étude expérimentale d'algorithmes ou l'obtention de propriétés asymptotiques des objets engendrés. Pour engendrer aléatoirement une arborescence de Cayley à n sommets, uniformément parmi toutes les arborescences de $\mathcal{A}_n$, il suffit d'engendrer aléatoirement et uniformément un mot de longueur $(n-1)$ sur $[n]$, ce qui ne pose aucun problème et se fait efficacement, puis d'appliquer l'algorithme 2 transformant un mot en une arborescence.

1.2.2 L'approche formelle : séries génératrices et formule de Lagrange

Il n'est pas toujours facile d'exhiber une preuve bijective pour un résultat énumératif. De plus, l'approche bijective telle que présentée ci-dessus a le défaut de ne pas être très générale : il faut trouver une bijection pour chaque problème traité. Le principal outil permettant, si ce n'est "d'automatiser" la résolution des problèmes d'énumération, tout au moins d'en traiter une vaste classe est la *série génératrice.*

Définition 12. Soient $\mathcal{F}$ une famille d'objets combinatoires munis d'un paramètre entier positif $p\ : \mathcal{F} \to N$ (appelé la taille). On note f_n le nombre (fini) d'objets de $\mathcal{F}$ de taille n. On appelle *série génératrice ordinaire* de $\mathcal{F}$ la série formelle

$$\sum_{n \geq 0} f_n x^n,$$

et *série génératrice exponentielle* de $\mathcal{F}$ la série formelle

$$\sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}.$$

Notation. On utilise la notation $[x^n]F(x)$ pour désigner le coefficient de x^n dans la série formelle $F(x)$, c'est-à-dire le coefficient de x^n dans le développement de Taylor de la série $F(x)$ au voisinage de 0.

Il existe d'autres familles de séries formelles utilisées en combinatoire énumérative, comme par exemple les séries de Dirichlet. On peut également, comme on le verra à partir du chapitre 5, considérer plusieurs paramètres sur une famille d'objets combinatoires, ce qui se traduit par l'introduction de séries formelles multivariées (à chaque paramètre est assignée une variable).

On utilise habituellement les séries génératrices exponentielles pour traiter les structures étiquetées et les séries génératrices ordinaires pour traiter les structures non étiquetées. Comme par la suite, nous nous intéressons à des objets étiquetés (les arborescences par exemple), sauf mention contraire, nous emploierons le terme série génératrice pour désigner une série génératrice exponentielle.

Remarque 13. Les séries génératrices exponentielles associées respectivement à $\mathcal{E}$ (la famille des ensembles), $\mathcal{L}$ (la famille des listes ordonnées) et $\mathcal{C}$ (la famille des listes circulairement ordonnées) sont $E(x) = e^x$, $L(x) = 1/(1-x)$ et $C(x) = 1 + \ln(1/(1-x))$.

Un des intérêts des séries génératrices réside dans le fait que l'on peut traduire les opérations usuelles de construction combinatoire en termes d'opérations sur les séries génératrices des objets considérés (cela vaut aussi bien pour les séries génératrices ordinaires qu'exponentielles).

Par exemple, soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles d'objets combinatoires, de séries génératrices respectives $F(x)$ et $G(x)$. Si $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ (on suppose cette union disjointe : un objet H de $\mathcal{H}$ est soit un objet de $\mathcal{F}$ soit un objet de $\mathcal{G}$, la taille de H étant sa taille dans $\mathcal{F}$ si $H \in \mathcal{F}$ ou sa taille dans $\mathcal{G}$ si $H \in \mathcal{G}$), la série génératrice $H(x)$ de $\mathcal{H}$ est

$$H(x) = F(x) + G(x).$$

Si $\mathcal{H} = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ (un objet de $H \in \mathcal{H}$ est un couple (F,G) formé d'un objet de $F \in \mathcal{F}$ et d'un objet de $G \in \mathcal{G}$, sa taille étant la somme des tailles de F et G), la série génératrice $H(x)$ de $\mathcal{H}$ est

$$H(x) = F(x).G(x).$$

Mais l'opération qui s'avère la plus utilisée dans le cas des structures arborescentes est la composition de séries. Soit $\mathcal{G}$ une classe de structures donnée, de série génératrice $G(x)$. Pour une famille $\mathcal{H}$ d'objets combinatoires, de série associée $H(x)$, la série associée aux $\mathcal{G}$-assemblées d'objets de $\mathcal{H}$ (la taille d'une telle assemblée étant la somme des tailles des objets présents dans cette assemblée) est alors

$$G(H(x)).$$

Cette opération est particulièrement adaptée à l'énumération de structures arborescentes. En effet, pour une classe $\mathcal{G}$ donnée (de série génératrice $G(x)$), une $\mathcal{G}$-arborescence peut se décomposer en deux parties : un sommet isolé (la racine) et une $\mathcal{G}$-assemblée de $\mathcal{G}$-arborescences (figure 1.4). La série génératrice $A_G(x)$ de la famille des $\mathcal{G}$-arborescences (dans ce cas le paramètre taille est le nombre de sommets) vérifie alors l'équation fonctionnelle

$$A_G(x) = xG(A_G(x)). \tag{1.2}$$

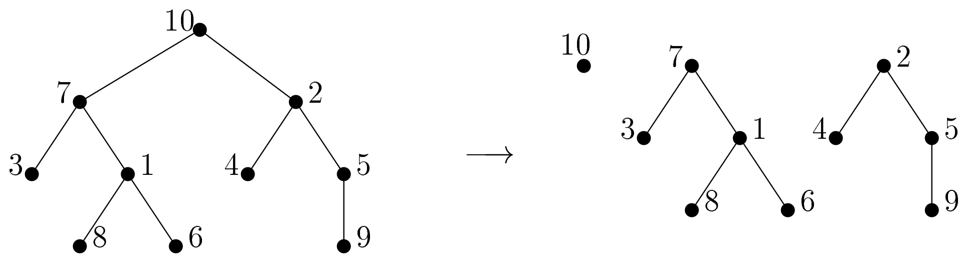


FIG. 1.4 – Décomposition d'une arborescence de Cayley

Dans certains cas, on peut déduire directement d'une telle équation fonctionnelle une expression pour la série considérée. Par exemple, pour la série génératrice $O(x)$ des arborescences ordonnées $\mathcal{O}$, on déduit de l'équation fonctionnelle

$$O(x) = xL(O(x)),$$

où

$$L(x) = \frac{1}{1-x}$$

est la série associée à la famille des ordres linéaires, que

$$O(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \tag{1.3}$$

et un rapide calcul permet d'extraire les coefficients de cette série et de montrer que le nombre d'arborescences ordonnées sur $[n]$ est

$$\frac{n!}{n+1}\binom{2n}{n} = n!C_n$$

où C_n est le $n^{ème}$ nombre de Catalan (voir [148] pour une présentation de ces nombres, que l'on rencontre très souvent en combinatoire).

On ne peut cependant pas toujours obtenir une forme close pour la série génératrice recherchée. C'est notamment le cas des arborescences de Cayley, dont la série $A(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$A(x) = xe^{A(x)}. \tag{1.4}$$

C'est là qu'intervient un outil fondamental en combinatoire énumérative pour traiter les séries vérifiant des équations de la forme (1.2) (que nous désignons par le terme d'*équations lagrangiennes*) : la formule de Lagrange pour l'inversion de séries formelles (sur la formule de Lagrange et ses applications à l'énumération de structures arborescentes, on peut se reporter à [77, 146, 16]).

Théorème 14. *Soit $F(x)$, $G(x)$ et $H(x)$ trois séries formelles telles que $G(0) \neq 0$. L'équation*

$$F(x) = xG(F(x)) \tag{1.5}$$

détermine alors la série formelle en $H(F(x))$ par :

$$[x^n]H(F(x)) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]\frac{\partial H(x)}{\partial x}(F(x))^n. \tag{1.6}$$

En appliquant cette formule aux arborescences de Cayley ($G(x) = e^x$ et $H(x) = x$), on obtient alors immédiatement le résultat du théorème 5.

De même, en posant $H(x) = x^k/k!$, c'est-à-dire la série génératrice des ensembles de taille k (cette série se réduit donc à un seul terme) on obtient le résultat du théorème 10 sur les forêts d'arborescences de Cayley.

Pour une description détaillée de l'utilisation des séries génératrices pour l'énumération de structures décomposables on peut se reporter aux ouvrages de Goulden et Jackson [77], Wilf [165], Stanley [146, chapitre 5] ou Bergeron, Labelle et Leroux [16]. Ces séries sont aussi très utilisées en analyse d'algorithmes, et dans ce domaine, on peut se reporter au livre de Flajolet et Sedgewick [139] ou à l'article de Steyaert et Flajolet [149] qui présente une très belle illustration de ces techniques dans l'analyse d'un algorithme de recherche de motifs dans une arborescence.

Pour conclure ce chapitre, il faut cependant mentionner que, contrairement à ce que peut laisser supposer le titre de cette section ("l'approche formelle"), l'utilisation de séries génératrices et de la formule d'inversion de Lagrange n'est pas purement formelle. En effet, l'obtention d'une équation "lagrangienne" (de la forme de l'équation (1.5)) pour une série implique une compréhension de la structure des objets correspondants. De plus, il existe plusieurs preuves combinatoires de cette formule qui permettent souvent de traduire de manière bijective les résultats obtenus par application de l'inversion de Lagrange. La première preuve combinatoire de la formule de Lagrange est due à Raney [131], qui montre que le membre droit de (1.6) énumère les mots du langage de Lukasiewicz pondéré par les coefficients de la série $G(x)$. En utilisant le principe de la conjugaison de mots, il en déduit une preuve combinatoire de la formule d'inversion de Lagrange. Cette preuve est basée sur l'énumération de mots d'un langage algébrique, et donc sur la manipulation d'objets non étiquetés et de séries génératrices ordinaires en variables non commutatives. La première preuve bijective de la formule de Lagrange manipulant des structures étiquetées et des séries génératrices exponentielles apparaît dans les deux premiers articles fondant la théorie des espèces de structures [96, 108] (voir aussi [77] et [16, section 3.1]), et est basée sur une élégante bijection entre certaines familles d'arborescences et certaines familles d'endofonctions, que nous présentons au chapitre 5. Parmi les travaux portant sur l'interprétation combinatoire de l'inversion de Lagrange, on peut aussi mentionner les travaux de Chen [38, 39], basés sur l'utilisation d'arborescences de Schröder et dans lesquels Chen réunit sous un même formalisme une preuve manipulant des structures non étiquetées et une preuve manipulant des structures étiquetées.

Chapitre 2

Arborescences de Cayley et fils de la racine

À l'origine des problèmes abordés dans ce chapitre se trouvent deux identités concernant respectivement $(n+1)^n$ et n^n. La première n'est autre qu'une application de la formule du binôme :

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{n-k}. \tag{2.1}$$

De manière surprenante, nous n'avons trouvé dans la littérature aucune interprétation simple et directe de l'identité (2.1) en termes d'arborescences de Cayley de racine non fixée (on explique en effet facilement cette identité en distribuant les arborescences de Cayley de racine étiquetée 1 et telles que le plus grand sommet est une feuille suivant le paramètre "degré de la racine", comme on le verra dans le paragraphe 2.1.1). La seconde identité qui a motivé cette étude est un cas particulier d'un résultat dû à Goulden et Jackson [79, proposition 3.1], relié à un problème de factorisations dans le groupe symétrique :

$$n^n = n(n-1)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \; k^k \; (n-1-k)^{n-1-k}. \tag{2.2}$$

Pour aborder ces deux problèmes, nous avons été amenés à étudier les arborescences de Cayley selon un paramètre nouveau, *le nombre de fils de la racine qui lui sont inférieurs.*

Remarque 15. Récemment, la famille des arborescences de Cayley telles que la racine est inférieure à ses fils a été introduite par Gessel dans le cadre de travaux (non publiés mais cités par Athanasiadis et Linusson [9]) sur l'énumération de régions de certains arrangements d'hyperplans (voir la section 2.5 de ce chapitre). Gessel montre, de manière formelle, qu'il y a n^n arborescences de Cayley sur $[n+1]$ telles que la racine est inférieure à ses fils. La démonstration du lemme 17 fournit une preuve bijective de ce résultat.

Dans la première section, nous montrons de manière bijective que l'énumération des arborescences de Cayley distribuées suivant le paramètre "nombre de fils de la racine qui lui sont inférieurs" donne une explication de l'identité (2.1). On peut noter que si cette identité et l'explication que nous en proposons sont simples, la preuve passe par une construction nécessitant l'examen de plusieurs cas non triviaux, ce qui explique sans doute que cette interprétation n'ait pas été trouvée plus tôt. La section suivante est consacrée à une étude combinatoire des arborescences de Cayley suivant ce paramètre. Cette étude permet de donner des preuves combinatoires d'identités, la plupart nouvelles à notre connaissance, et notamment de (2.2). Dans une troisième section, nous relions la famille des arborescences de Cayley telles que la racine est inférieure à tous ses fils à un problème de factorisation de permutations circulaires en un nombre minimal de transpositions. Nous concluons par l'utilisation de l'inversion de Lagrange pour compter les arborescences ordonnées, cycliques et planes dont la racine est inférieure à ses fils.

Notation. Dans les sections 2.1, 2.2 et 2.3, toutes les arborescences considérées sont des arborescences de Cayley et nous nous contentons donc de parler d'arborescences.

2.1 Arborescences de Cayley

Dans cette section, nous proposons une interprétation de l'identité (2.1) en termes d'arborescences, via le résultat suivant.

Théorème 16. *Le nombre d'arborescences sur $[n+1]$ telles que la racine a exactement k fils qui lui sont inférieurs est*

$$\binom{n}{k} n^{n-k}.$$

Dans le cas $k = 0$, ce résultat, qui montre que le nombre d'arborescences sur $[n]$ telles que la racine est inférieure à ses fils est $(n-1)^{n-1}$, peut être vu en fait comme un résultat intermédiaire entre les formules donnant le nombre d'arborescences de racine 1 (n^{n-2}) et le nombre d'arborescences sans restriction (n^{n-1}).

La suite de cette section est consacrée à une preuve bijective du théorème 16. Nous procédons en deux étapes. Dans un premier temps, nous prouvons le cas particulier $k = 0$ (i.e. nous montrons que le nombre d'arborescences sur $[n+1]$ telles que la racine est plus petite que tous ses fils est n^n). Dans un second temps, nous étendons la bijection précédente au cas général pour prouver le théorème 16.

Notation. On note $\mathcal{A}_{n,k}$ la famille des arborescences sur $[n]$ telles que la racine a exactement k fils qui lui sont inférieurs.

2.1.1 Arborescences dont la racine est inférieure à ses fils

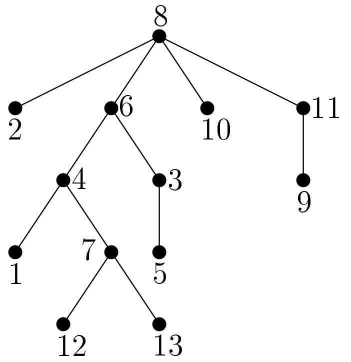
Soit $\mathcal{B}_n$ la famille des arborescences sur $[n]$ telles que n est une feuille. On déduit immédiatement de la formule de Cayley (théorème 5), que $|\mathcal{B}_n| = (n-1)^{n-1}$ (pour obtenir une arborescence de $\mathcal{B}_n$ il suffit en effet de considérer une arborescence de Cayley sur $[n-1]$ ayant un sommet distingué et d'insérer n comme fils du sommet distingué).

Lemme 17. *Il existe une bijection ϕ entre $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{A}_{n,0}$.*

Définition 18. Soit A une arborescence, x et y deux sommets de A tels que x est le père de y. L'arête (x,y) est *décroissante* (resp. *croissante*) si $x > y$ (resp. $x < y$). Une arborescence est *décroissante* (resp. *croissante*) si toutes ses arêtes sont décroissantes (resp. croissantes).

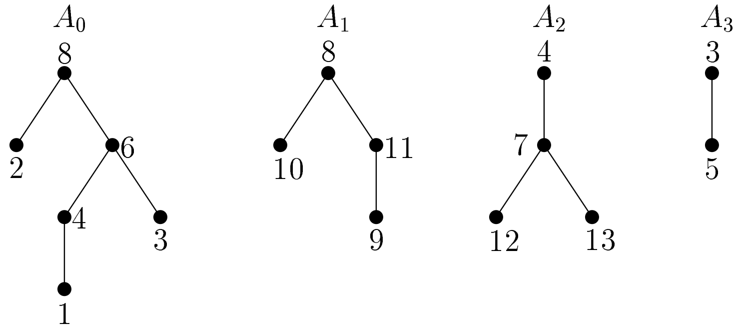
La bijection ϕ se décompose en trois étapes, que nous illustrons au fur et à mesure avec un exemple. Soit A une arborescence de $\mathcal{B}_n$, de racine r. On cherche à construire une arborescence $A' = \phi(A)$ appartenant à $\mathcal{A}_{n,0}$.

Considérons par exemple l'arborescence A sur 13 sommets suivante, de racine $r = 8$.

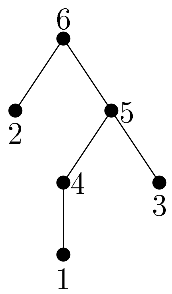


Étape 1. La première étape de la bijection ϕ consiste à décomposer A en un ensemble non ordonné d'arborescences $(A_0,A_1,\ldots,A_k)$ défini comme suit :

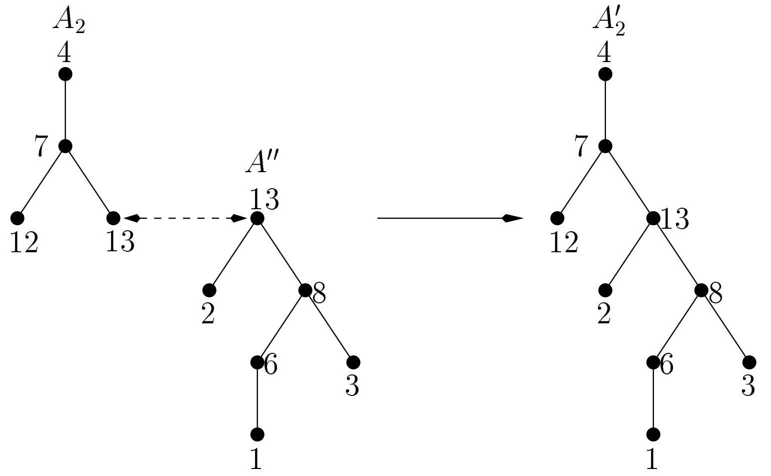
- A_0 est la sous-arborescence décroissante maximale de A enracinée en r,
- $A_1,\ldots,A_k$ sont les arborescences ayant au moins deux sommets et obtenues à partir de A par suppression de toutes les arêtes appartenant à A_0.



On obtient alors un ensemble d'arborescences telles que les racines des A_i, pour $i = 0,\ldots,k$, sont toutes des sommets de A_0. Par construction, on peut dire que, pour $i = 1,\ldots,k$, chacune des arborescences A_i est telle que la racine est inférieure à ses fils. De plus, si l'arborescence décroissante A_0 a m sommets, elle peut être codée par un couple (A'_0,S) où A'_0 est une arborescence décroissante sur $[m]$ et $S \subset [n]$ est le sous-ensemble de $[n]$ formé des étiquettes de A_0.
Dans notre exemple, nous avons $m = 6$, $S = \{1,2,3,4,6,8\}$ et A'_0 est l'arborescence suivante.

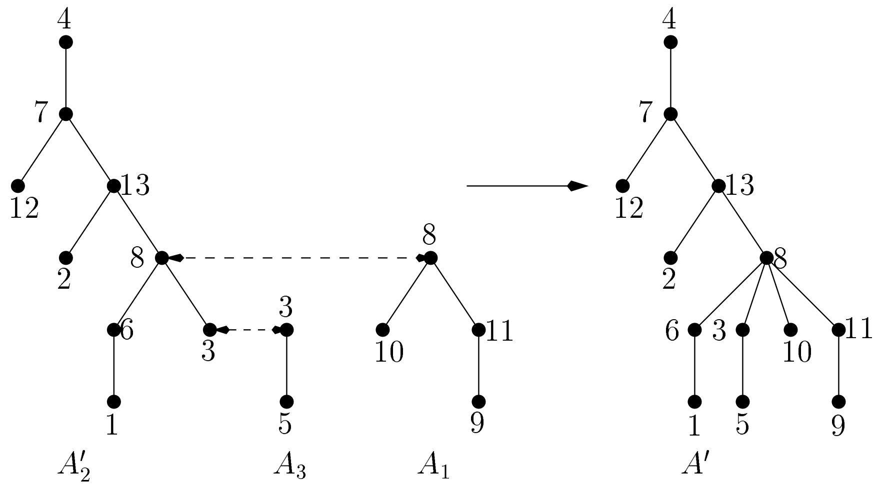


Étape 2. Soit A_j l'arborescence contenant le sommet étiqueté n, et r_j sa racine. On définit un ensemble S' en remplaçant r_j par n dans S ($S' = \{n\} \cup S/\{r_j\}$). Dans notre exemple, $j = 2$, $r_j = 4$ et $S' = \{1,2,3,6,8,13\}$). On considère alors l'arborescence décroissante A'' codée par le couple (A'_0,S') (qui a donc n pour racine). Cette arborescence A'' est greffée à l'arborescence A_j (par identification du sommet n) pour donner l'arborescence A'_j.



On dispose ainsi d'un ensemble de k arborescences, $(A_1, \ldots, A_{j-1}, A'_j, A_{j+1}, \ldots, A_k)$, tel que la racine de A'_j est inférieure à ses fils et A'_j contient toutes les étiquettes de A_0. On va alors rassembler ces arborescences en une seule arborescence.

Étape 3. Chacune des arborescences restantes A_i ($i > 0$, $i \neq j$), est greffée à A'_j en identifiant la racine de l'arborescence avec le sommet de même étiquette dans A'_j, ce qui donne par construction une arborescence appartenant à $\mathcal{A}_{n,0}$.



Cette construction possède clairement la propriété suivante, que nous utilisons dans la section suivante.

Propriété 19. Le nombre d'arêtes décroissantes dans $\phi(A)$ est égal au nombre d'arêtes décroissantes dans A.

Pour prouver le lemme 17, il suffit alors de décrire l'inverse de la construction précédente, qui consiste à reprendre ses 3 étapes. Soit A' une arborescence de $\mathcal{B}_n$ de racine r.

1. Dans A', soit A'' la sous-arborescence décroissante maximale enracinée en n. En supprimant toutes les arêtes de cette sous-arborescence, on obtient l'ensemble $(A'',A_1,$

$\ldots, A_j, \ldots, A_k)$.

2. Si A'' est codée par le couple (A'_0, S'), on considère l'arborescence A_0 correspondant au couple (A'_0, S), où $S = \{r\} \cup S'/\{n\}$.
3. Finalement, la construction de A à partir de $(A_0, \ldots, A_j, \ldots, A_k)$ est immédiate.

2.1.2 Le cas général

Soit $\mathcal{F}_{n,k}$ l'ensemble des forêts sur $[n]$ constituées de k arborescences dans lesquelles n est une feuille. Le cardinal de $\mathcal{F}_{n,k}$ est clairement égal au nombre d'arborescences sur $[n+1]$ dont la racine d'étiquette 1 a k fils, et dans lesquelles $n+1$ est une feuille.

Par application du codage de Prüfer, on sait que ces arborescences sont codées par des mots de longueur n sur l'alphabet $[n+1]$ possédant k occurrences de 1 (dont une comme dernière lettre du mot) et aucune occurrence de $n+1$ (qui est une feuille). On a donc :

$$|\mathcal{F}_{n,k}| = \binom{n-1}{k-1}(n-1)^{n-k}. \tag{2.3}$$

La preuve du théorème 16 est alors une conséquence directe du lemme suivant et de (2.3).

Lemme 20. *Il existe une bijection Φ entre $\mathcal{F}_{n,k+1}$ et $\mathcal{A}_{n,k}$.*

La suite de ce paragraphe est consacrée à la preuve de ce lemme. Soit $F \in \mathcal{F}_{n,k+1}$, c'est-à-dire une forêt de $(k+1)$ arborescences $(A_1, A_2, \ldots, A_{k+1})$ sur $[n]$, de racines respectives $r_1, r_2, \ldots, r_{k+1}$, avec $r_1 < r_2 < \cdots < r_{k+1}$. Soit A_j l'arborescence de F contenant la feuille étiquetée n. On distingue alors deux cas.

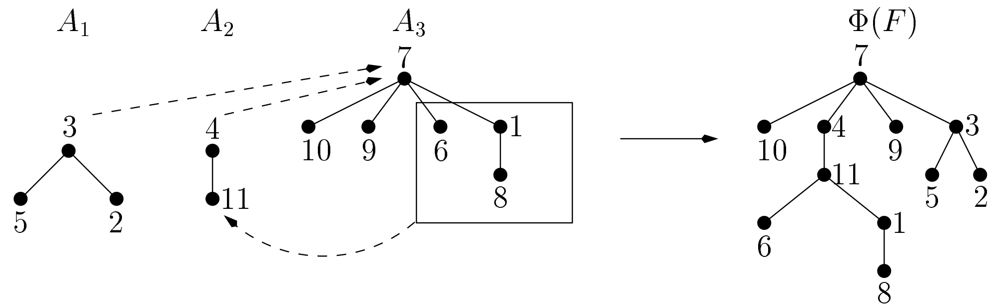
Cas 1. Si

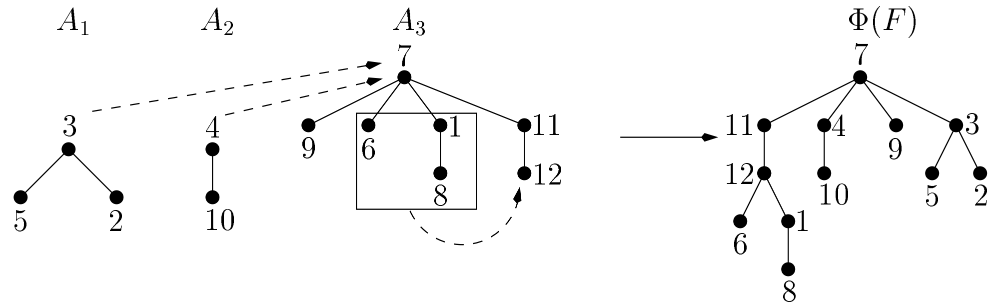
- $r_{k+1} \neq r_j$,

ou

- $r_{k+1} = r_j$ et le chemin allant de r_j à n débute par une arête croissante,

alors $\Phi(F)$ est obtenue, à partir de F, en greffant sous la feuille n toutes les sous-arborescences de A_{k+1} dont les racines sont les fils de r_{k+1} qui lui sont inférieurs, puis en greffant sous le sommet r_{k+1} les k arborescences restantes, à savoir $A_1, A_2, \ldots, A_k$. On obtient alors une arborescence appartenant à $\mathcal{A}_{n,k}$. Les deux exemples qui suivent illustrent ces deux situations et la transformation résultante.



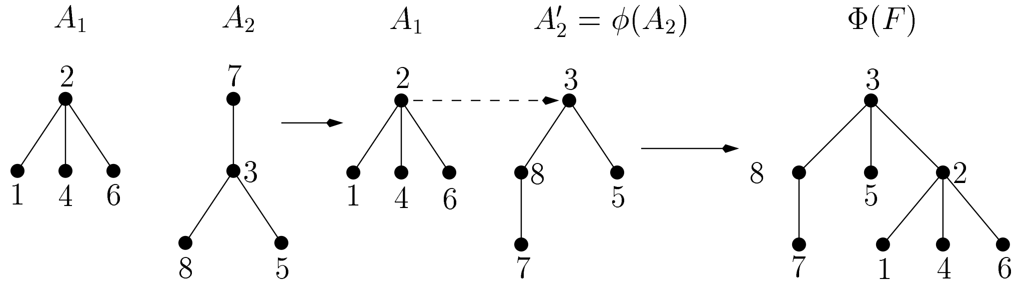


Propriété 21. Dans l'arborescence $\Phi(F)$ ainsi obtenue, tous les fils de n sont inférieurs à la racine r.

Cas 2. $r_{k+1} = r_j$ et le chemin allant de r_{k+1} à n commence par une arête décroissante.

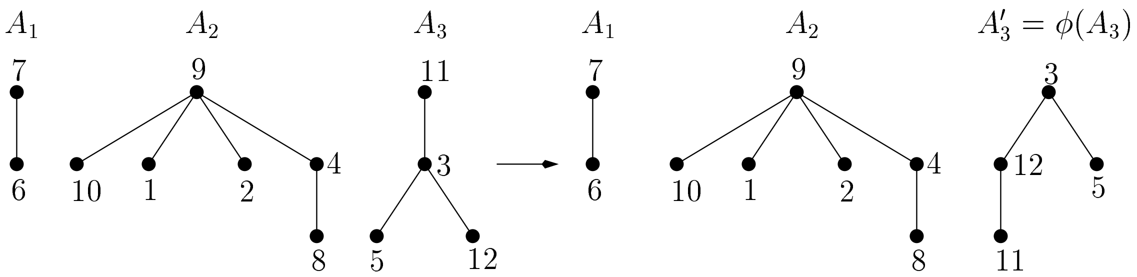
Dans un premier temps, n étant une feuille, on applique à A_{k+1} la bijection ϕ définie précédemment pour le cas $k = 0$, et on note A'_{k+1} l'arborescence ainsi obtenue et r'_{k+1} sa racine qui, par construction, est plus petite que tous ses fils. On distingue alors deux sous-cas.

Sous-cas 2.a. Si $r'_{k+1} > r_i$ pour $i = 1,2,\dots,k$, alors $\Phi(F)$ est obtenue, à partir de F, en greffant sous r'_{k+1} les k arborescences $A_1,A_2,\dots,A_k$.



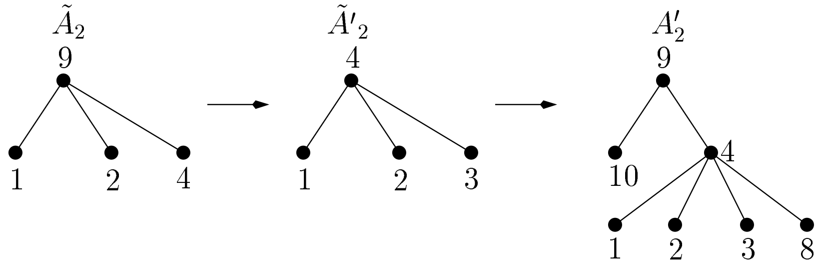
Propriété 22. Soit r la racine de l'arborescence $\Phi(F)$ ainsi obtenue. Au moins un fils de n est supérieur à r. De plus, le chemin allant de r à n débute par une arête croissante.

Sous-cas 2.b. Sinon, $r_k > r'_{k+1}$, et r_k est donc la plus grande racine de la forêt constituée de $A_1,A_2,\dots,A_k,A'_{k+1}$.

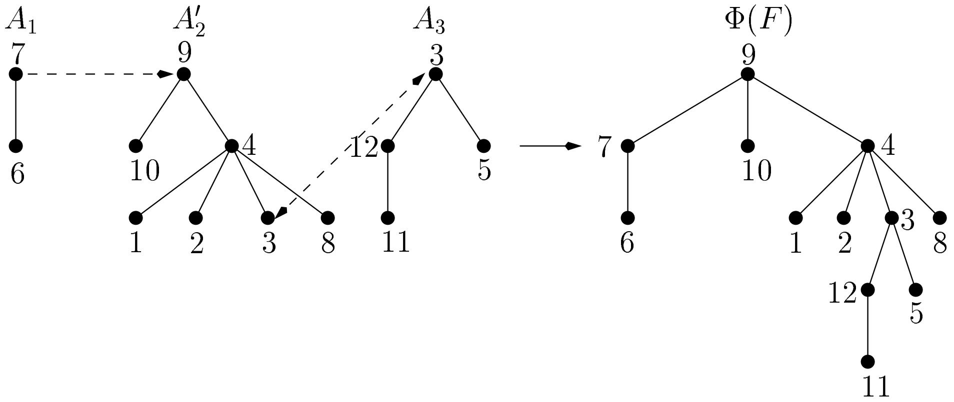


On procède en deux étapes. Soit $\tilde{A}_k$ la sous-arborescence décroissante maximale de A_k enracinée en r_k. Comme on l'a vu dans la description de ϕ, on peut coder $\tilde{A}_k$ par un couple $(\tilde{A'_k},S)$. On définit alors $S' = \{r'_{k+1}\} \cup S/\{r_k\}$ et A'_k comme l'arborescence A_k où les arêtes de $\tilde{A}_k$ ont été supprimées et la sous-arborescence décroissante codée par $(\tilde{A'_k},S')$

a été greffée sous r_k, les autres arêtes restant inchangées. Dans notre exemple, on a donc $S = \{1,2,4,9\}$, $S' = \{1,2,3,4\}$ et on effectue les transformations suivantes.



Dans un deuxième temps, on greffe l'arborescence A'_{k+1} sous r'_{k+1} (dans A'_k donc) et, toujours dans A'_k, on greffe sous r_k les arborescences restantes, à savoir $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$. On obtient alors une arborescence de $\mathcal{A}_{n,k}$.



Propriété 23. Soit r la racine de l'arborescence $\Phi(F)$ ainsi obtenue. Cette racine possède k fils qui lui sont inférieurs et au moins un fils de n est supérieur à r. De plus, le chemin allant de r à n débute par une arête décroissante.

Pour définir la construction inverse Φ^{-1}, il suffit de remarquer que toute arborescence vérifie une et une seule des propriétés 21, 22 ou 23. Soit donc A une arborescence de $\mathcal{A}_{n,k}$, de racine r.

Cas 1. Si A vérifie la propriété 21, en supprimant les arêtes entre r et ses fils qui lui sont inférieurs, puis en transférant les fils de n sous r, on obtient la forêt $F = \Phi^{-1}(A)$.

Cas 2. Si A vérifie la propriété 22, on commence par supprimer les arêtes reliant r et ses fils qui lui sont inférieurs. On obtient alors une forêt dont l'arborescence de racine r est telle que cette racine est inférieure à tous ses fils. Il suffit alors d'appliquer ϕ^{-1} à cette arborescence pour obtenir $F = \Phi^{-1}(A)$.

Cas 3. Si A vérifie la propriété 23, on commence par supprimer les arêtes reliant r et ses fils qui lui sont inférieurs, sauf celle menant vers n (on note x le fils de r extrémité de cette arête). Ensuite, soit y le premier sommet sur le chemin de x à n tel que tous ses fils lui soient supérieurs. On extrait la sous-arborescence de racine y. Ensuite on applique la transformation décrite dans le sous-cas 2.b à l'arborescence de racine r puis ϕ^{-1} à l'arborescence de racine y.

2.2 Quelques identités

Dans cette section, nous utilisons les résultats précédents pour donner des interprétations combinatoires de plusieurs identités, la plupart nouvelles à notre connaissance.

Étiquette de la racine. Le corollaire 8 nous a permis de rappeler que, pour un entier $r \in [n]$ fixé, le nombre d'arborescences sur $[n]$ de racine r est n^{n-2}. Nous proposons maintenant un résultat analogue pour les arborescences de $\mathcal{A}_{n,k}$.

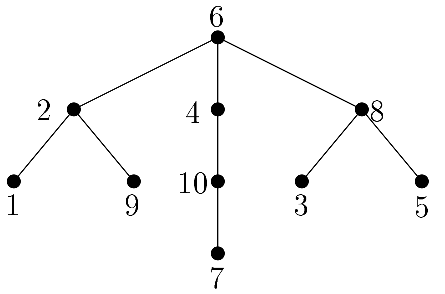
Théorème 24. *Le nombre d'arborescences de $\mathcal{A}_{n+1,k}$ de racine $r+1$ ($r = k,k+1,\dots,n$) est*

$$(n+1)^{n-r-1} n^{r-k-1} \binom{r-1}{k-1} \left(\frac{(n-r)(r-k)}{k} + n(n+1) \right), \text{ si } k > 0, \tag{2.4}$$

$$(n+1)^{n-r-1} n^{r-1} (n-r), \text{ si } k = 0. \tag{2.5}$$

Preuve. Nous prouvons ce résultat par une variante du codage de Prüfer. Le codage de Prüfer, présenté au chapitre précédent, met en correspondance une arborescence sur $[n]$ et un mot de longueur $(n-1)$ sur l'alphabet $[n]$. Dans la variante que nous proposons, nous mettons en correspondance une arborescence sur $[n]$ et un couple (m,M) de deux mots sur l'alphabet $[n]$, de longueurs cumulées $(n-1)$. Dans un premier temps, nous décrivons cette variante du codage de Prüfer, puis nous énumérons les couples de mots en correspondance avec une arborescence $\mathcal{A}_{n+1,k}$ de racine $r+1$.

Le principe guidant notre variante du code de Prüfer (voir algorithme 1) est que lorsque l'on retire une arête d'une arborescence (l'arête (y,x) contenant la plus grande feuille restante x), on insère y dans le mot m si x est inférieur à la racine et dans le mot M sinon.



$\longleftrightarrow$ $\quad m = 8.6.8.2.6$, $\quad M = 2.10.4.6$

Pour une arborescence de $\mathcal{A}_{n+1,k}$ de racine $r+1$, le couple (m,M) obtenu en appliquant cet algorithme vérifie les propriétés suivantes (pour $k \geq 0$) :

(a) $|m| = r$ et $|M| = n-r$,

(b) il y a exactement k occurrences de $r+1$ dans m (car $r+1$ a exactement k fils qui lui sont inférieurs),

(c) si x est la dernière lettre de m, $x \geq r+1$ ($x \geq r+2$ si $k=0$ car dans ce cas $r+1$ n'apparaît pas dans m),

(d) $r+1$ est la dernière lettre de m ou la dernière lettre de M (éventuellement des deux mots), et uniquement la dernière lettre de M si $k=0$.

Pour construire une arborescence A de $\mathcal{A}_{n+1,k}$ de racine $r+1$ à partir d'un couple (m,M) vérifiant ces propriétés, on applique le principe de l'algorithme 2. Soit F l'ensemble des éléments de $[n+1]$ n'apparaissant ni dans M ni dans m : tant que l'un des deux mots M

ou m n'est pas vide, retirer le plus grand élément x de F et si $x > r+1$ (resp. $x < r+1$), retirer de M (resp. m) sa première lettre y, l'ajouter à F si y n'apparaît plus ni dans M ni dans m, et ajouter une arête de y vers x dans A.

Il reste alors à compter les couples de mots vérifiant les propriétés ci-dessus. On distingue deux cas :

1. si la dernière lettre de m est $r+1$, il faut choisir $k-1$ positions dans m, parmi $r-1$ (cf. (a)), recevant les $k-1$ occurrences restantes de $r+1$ (cf. (b)), puis remplir les positions restantes de m avec la seule contrainte que $r+1$ n'y apparaît pas et il n'y a aucune contrainte sur le mot M (cf. (d)), ce qui donne
$$\binom{r-1}{k-1} n^{r-k}(n+1)^{n-r} \tag{2.6}$$
couples (m,M) possibles dans ce cas là ;
2. si la dernière lettre de m est différente de $r+1$, il faut choisir k positions dans m, parmi $r-1$, recevant les k occurrences de $r+1$, puis choisir la dernière lettre de m parmi $\{r+2,\ldots,n+1\}$ (cf. (c)), remplir les positions restantes de m sans y faire apparaître $r+1$ et enfin la seule contrainte sur M est que sa dernière lettre est $r+1$, ce qui donne
$$\binom{r-1}{k}(n-r)n^{r-k-1}(n+1)^{n-r-1} \tag{2.7}$$
couples (m,M) possibles dans ce cas.

La formule (2.4) s'obtient en sommant les deux expressions (2.6) et (2.7). Pour obtenir (2.5), il suffit de remarquer que seul le cas 2 intervient lorsque $k = 0$. □

En considérant le cas $k = 0$ du théorème 24 et en sommant sur les valeurs possibles pour r, on obtient alors une preuve combinatoire de l'identité suivante.

Corollaire 25.
$$n^n = \sum_{r=0}^{n-1}(n-r)(n+1)^{n-r-1}n^{r-1}.$$

Degré de la racine. Dans le même esprit, on peut étudier la distribution des arborescences de $\mathcal{A}_{n+1,k}$ selon le degré de la racine.

Proposition 26. *Le nombre d'arborescences de $\mathcal{A}_{n+1,k}$ dont la racine a d fils ($d \geq k$) est*
$$\binom{n+1}{d+1}k(d-k)\sum_{s=0}^{n-d}\binom{n-d}{s}(s+k)^{s-1}(n-s-k)^{n-s-d-1},\ \textit{si}\ k>0, \tag{2.8}$$
$$\binom{n+1}{d+1}d\ n^{n-d-1},\ \textit{si}\ k=0. \tag{2.9}$$

Preuve. Une arborescence de $\mathcal{A}_{n+1,k}$ de racine r de degré d peut être décomposée en 3 parts :

– un sommet isolé (la racine r),

– un ensemble de k arborescences, comportant $s+k$ sommets, de racines $r_1 < \cdots < r_k < r$,
– un ensemble de $d-k$ arborescences, comportant $n-k-s$ sommets, de racines $r < t_1 < \cdots < t_{d-k}$.

On a vu (théorème 11) que le nombre de forêts de Cayley à n sommets et k arborescences de racines fixées est $k\, n^{n-k-1}$ si $k > 0$. On en déduit qu'après avoir choisi les $d+1$ sommets correspondant aux r_i, aux t_i et la racine r, et s sommets différents des r_i, des t_i et de r pour les arborescences de racines $r_1, \ldots, r_k$, on a deux forêts à construire :

– une forêt de k arborescences de racines $r_1, \ldots, r_k$ à $s+k$ sommets,
– une forêt de $d-k$ arborescences de racines $t_1, \ldots, t_{d-k}$ à $n-s-k$ sommets,

ce qui prouve (2.8). Lorsque $k=0$, le même raisonnement permet d'obtenir (2.9) : choix de $d+1$ sommets et construction d'une forêt de d arborescences sur n sommets. □

Remarque 27. En comparant le résultat pour $k=0$ avec son analogue pour les arborescences sans condition sur la racine (théorème 9), on remarque la relation suivante, quelque peu surprenante à première vue, entre n^n et $(n+1)^n$:

$$\begin{aligned}(n+1)^n &= \sum_{d=1}^{n} \frac{(n+1)}{n} \binom{n}{d}\, d\, n^{n-d-1},\\ n^n &= \sum_{d=1}^{n} \frac{(n+1)}{(d+1)} \binom{n}{d}\, d\, n^{n-d-1}.\end{aligned}$$

Nombre d'arêtes décroissantes. Nous nous intéressons maintenant successivement au nombre d'arêtes décroissantes dans $\mathcal{A}_{n+1,0}$, puis aux arborescences de $\mathcal{A}_{n+1,k}$ ayant exactement k arêtes décroissantes, ce qui nous permet d'obtenir une identité, semble-t-il nouvelle, concernant les *nombres de Stirling de première espèce.* Pour une présentation détaillée des nombres de Stirling, on pourra se reporter à [82, section 6.1].

Définition 28. Les nombres de Stirling de première espèce $s(n,m)$ (pour $n,m > 0$) sont définis par

$$s(n,m) = (-1)^{n-m} c(n,m),$$

où $c(n,m)$ est le nombre de permutations de $[n]$ comportant m cycles.

Proposition 29. *Le nombre d'arborescences de $\mathcal{A}_{n+1,0}$ ayant k arêtes décroissantes ($k = 0,1,\ldots,n-1$) est*

$$(-1)^{k+1} \sum_{m=k+1}^{n} \binom{m}{k+1} s(n+1,n+1-m)\; n^{n-m}. \tag{2.10}$$

Preuve. Pour prouver ce résultat, nous introduisons les notions *d'endofonction* et de *descente* dans une endofonction :

– une *endofonction* sur $[n]$ est une fonction de $[n]$ dans $[n]$;
– une *descente* dans une endofonction f est un entier $x \in [n]$ tel que $f(x) \geq x$.

Dans [100], Khidr et El-Desouky prouvent (bien que le résultat ne soit pas exprimé en termes d'endofonctions, mais en termes de chemins dans des matrices carrées à valeurs dans $\{0,1\}$) que le nombre d'endofonctions sur $[n]$ à k descentes est

$$(-1)^k \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \; s(n+1,n+1-m) \; n^{n-m}.$$

Dans [96] (voir aussi G. Labelle [108]), Joyal décrit une bijection entre les endofonctions sur $[n]$ et les arborescences sur $[n]$ ayant un sommet distingué (ou de manière équivalente les arborescences sur $[n+1]$ telles que le sommet $n+1$ est une feuille), cette bijection ayant la propriété que le nombre de descentes d'une endofonction est égal au nombre d'arêtes décroissantes de l'arborescence correspondante plus 1. La proposition découle alors directement de ces deux résultats, de la bijection ϕ (lemme 17) et de la propriété 19. □

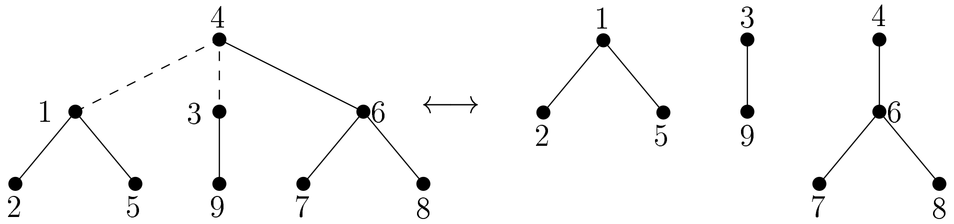
Proposition 30. *Le nombre d'arborescences de $\mathcal{A}_{n+1,k}$ ayant k arêtes décroissantes (toutes les arêtes décroissantes partent donc de la racine), pour $k = 0,1,\ldots,n$, est*

$$(-1)^{n-k} \; s(n+1,k+1). \tag{2.11}$$

Preuve. La preuve repose sur les résultats classiques suivants :

- le nombre d'arborescences croissantes sur $[n+1]$ est égal au nombre de permutations de $[n+1]$ ayant un seul cycle, c'est-à-dire $n!$ (dans une arborescence croissante sur $[n]$ on peut greffer le sommet $n+1$ comme feuille en exactement n positions différentes, ce qui, par induction, prouve que le nombre d'arborescences croissantes sur $[n+1]$ est $n!$) ;
- le nombre de permutations sur $[n+1]$ ayant m cycles est donné par $(-1)^{n+1-m}s(n+1,m)$ (définition 28).

Il suffit alors de remarquer qu'une arborescence de $\mathcal{A}_{n+1,k}$ ayant exactement k arêtes décroissantes est équivalente à une forêt de $k+1$ arborescences croissantes sur $[n+1]$ (en supprimant les arêtes reliant la racine à ses fils qui lui sont inférieurs) et le résultat en découle directement.



□

En posant $k = 0$ dans les propositions 29 et 30, on obtient alors l'identité suivante.

Corollaire 31.

$$(-1)^{n-1}s(n+1,1) = \sum_{m=1}^{n} m \; s(n+1,n+1-m) \; n^{n-m} = n!.$$

Sur une identité de Goulden et Jackson. Dans ce dernier paragraphe, nous nous intéressons à l'identité (2.2). Dans [79], Goulden et Jackson démontrent un résultat de Hurwitz [92] (voir aussi les travaux de V. Strehl [151]) exprimant le nombre de factorisations minimales transitives, en produit de transpositions, d'une permutation de type cyclique donné. Ce résultat a été étendu par M. Bousquet-Mélou et G. Schaeffer [25, 135].

La preuve de Goulden et Jackson est basée sur une utilisation astucieuse de la formule d'inversion de Lagrange, et fait notamment apparaître une identité intrigante concernant n^n.

Proposition 32. *Soit $T_{k,m}$ ($k \geq 1$ et $m \geq 1$) donné par la formule suivante (dans laquelle on suppose que $0^0 = 1$) :*

$$T_{k,m} = \frac{k^{k+1}}{k!} \sum_{i=1}^{m} \frac{i^i}{i!} \; \frac{(m-i)^{m-i}}{(m-i)!} \; \frac{1}{k+m-i}.$$

On a alors

$$(k+m)^{k+m} = (k+m)! \; (T_{k,m} + T_{m,k}). \tag{2.12}$$

La preuve de cette identité exposée dans [79] étant purement formelle (voir le mémoire de D. Poulalhon [126] pour un exposé plus détaillé de cette preuve), la question d'une explication combinatoire de cette identité est toujours ouverte. Une telle preuve serait notamment utile pour espérer obtenir une preuve bijective du résultat d'Hurwitz. Dans ce paragraphe, nous donnons une preuve combinatoire pour le cas $m = 1$, avant de reprendre la preuve de Goulden et Jackson pour mettre en évidence une propriété de $T_{k,m}$ pouvant mener à une preuve bijective du cas général.

Dans le cas $m = 1$, l'identité (2.12) se simplifie et on obtient l'identité (2.2) :

$$n^n = n(n-1)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \; k^k \; (n-1-k)^{n-1-k}.$$

Preuve de l'identité (2.2). On rappelle que le membre gauche de cette identité est le cardinal de $\mathcal{A}_{n+1,0}$.

Le membre droit de cette expression se compose de deux parties que nous traitons séparément: $n(n-1)^{n-1}$ et la sommation.

D'après le théorème 16, le nombre d'arborescences de $\mathcal{A}_{n+1,0}$ telles que $n+1$ est une feuille est clairement égal à $n(n-1)^{n-1}$, ce qui fournit un explication de la première partie de (2.2).

Considérons maintenant les arborescences de $\mathcal{A}_{n+1,0}$ pour lesquelles $n+1$ est un nœud. On note $\mathcal{R}_{n+1,k+1}$ l'ensemble des couples (A_1,A_2) d'arborescences telles que :

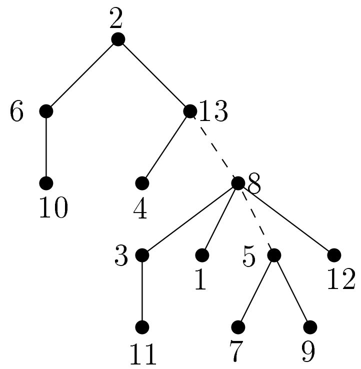
- la racine de A_1 (resp. A_2) est plus petite que ses fils,
- les ensembles S_1 et S_2 des étiquettes de A_1 et A_2 forment une partition de $[n+1]$, avec $|S_1| = k+1$, $|S_2| = n-k$ et $n+1 \in S_1$ ($n+1$ est donc un sommet de A_1).

Le théorème 16 nous permet d'affirmer que, pour $k = 1,\ldots,n-1$,

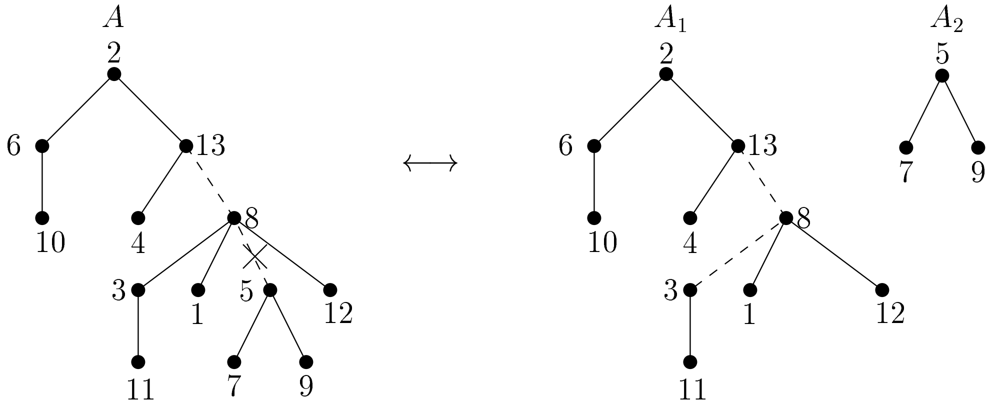
$$|\mathcal{R}_{n+1,k+1}| = \binom{n}{k} \; k^k \; (n-1-k)^{n-1-k}.$$

Pour prouver (2.2), il suffit donc d'établir une bijection entre les arborescences de $\mathcal{A}_{n+1,0}$ telles que $n+1$ est un nœud et l'union des $\mathcal{R}_{n+1,k+1}$, pour $k = 1,\ldots,n-1$.

Nous décrivons maintenant une telle bijection, qui utilise la notion de *branche décroissante maximale* issue d'un sommet : la *branche décroissante maximale* d'un sommet x appartenant à une arborescence A est l'ensemble des sommets $(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_j)$ tels que $x_0 = x$ et x_i est le plus grand fils de x_{i-1} inférieur à x_{i-1} (pour $i = 1,\ldots,j$). Dans la figure suivante par exemple, les arêtes de la branche décroissante maximale de 13, sont hachurées, et cette branche est constituée des sommets (13,8,5).



Soient A une arborescence de $\mathcal{A}_{n+1,0}$ telle que $n+1$ est un nœud et $(x_0,\ldots,x_j)$ la branche maximale décroissante de $x_0 = n+1$ dans A. En supprimant l'arête reliant x_j à son père x_{j-1} (comme $n+1$ est un nœud, on a toujours $j \geq 1$), on obtient un couple (A_1,A_2) d'arborescences (où A_1 est l'arborescence contenant le sommet $n+1$). Si A_1 contient $k+1$ sommets ($k \geq 1$ car A_1 contient $n+1$, qui ne peut être racine, et $k \leq n-1$ car A_2 est non vide), il est clair que $(A_1,A_2) \in \mathcal{R}_{n+1,k+1}$.



La construction inverse, permettant de reconstruire A à partir de (A_1,A_2) est très simple. Soit $(x_0,\ldots,x_l)$ la branche maximale décroissante de $x_0 = n+1$ dans A_1. En parcourant cette branche de x_0 vers x_l, on greffe A_2 comme fils du premier sommet x_j tel que la racine r_2 de A_2 est supérieure à x_{j+1} et inférieure à x_j (si $x_j = x_l$, on greffe A_2 sous x_l). Cette construction bijective conclut la preuve de (2.2). □

Pour conclure ce paragraphe consacré à l'identité (2.12), nous proposons une "relecture" de la preuve de Goulden et Jackson, qui suggère une "piste" pour une preuve bijective de cette identité.

On peut réécrire $T_{k,m}$ de la façon suivante.

$$T_{k,m} = \sum_{i+j=m,\ i\geq 1,\ j\geq 0} \frac{i^i}{i!}\frac{j^j}{j!}\frac{k^k}{k!}\frac{k}{k+j}.$$

On introduit alors la série génératrice ordinaire bivariée des coefficients $T_{k,m}$:

$$T(x,y) = \sum_{k,m\geq 1} T_{k,m} x^k y^m.$$

Considérons

$$u(x) = \sum_{i\geq 1} i^{i-1}\frac{x^i}{i!},$$

la série génératrice exponentielle des arborescences de Cayley non vides,

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i\geq 1} i^i \frac{x^i}{i!} = x\frac{\partial u}{\partial x}(x),$$

la série génératrice exponentielle des arborescences de Cayley pointées (un deuxième sommet, qui peut être la racine, est distingué) non vides, et

$$\hat{u}(x) = \sum_{i\geq 0} i^i \frac{x^i}{i!} = 1 + \tilde{u}(x).$$

Le terme "gênant" dans $T_{k,m}$ est le facteur $\frac{k}{k+j}$. Pour l'éliminer, on introduit une nouvelle variable formelle q et on considère la série $T(xq,yq)$. On a alors

$$T(xq,yq) = \sum_{k,m\geq 1} T_{k,m} x^k y^m q^{k+m}$$

$$\Longrightarrow T(xq,yq) = \sum_{k\geq 1} k^{k+1}\frac{x^k q^k}{k!}\left(\sum_{i\geq 1} i^i \frac{y^i q^i}{i!}\right)\left(\sum_{j\geq 0} j^j \frac{y^j q^j}{j!}\frac{1}{k+j}\right)$$

$$\Longrightarrow T(xq,yq) = \tilde{u}(yq)\sum_{k\geq 1, j\geq 0} k^{k+1}\frac{x^k}{k!} j^j \frac{y^j}{j!}\frac{q^{k+j}}{k+j}$$

$$\Longrightarrow T(xq,yq) = \tilde{u}(yq)\sum_{k\geq 1, j\geq 0} k^{k+1}\frac{x^k}{k!} j^j \frac{y^j}{j!}\int_0^q t^{k+j-1}dt$$

$$\Longrightarrow T(xq,yq) = \tilde{u}(yq)\int_0^q \sum_{k\geq 1, j\geq 0} k^{k+1}\frac{x^k}{k!} j^j \frac{y^j}{j!}\; t^{k+j-1}dt$$

$$\Longrightarrow T(xq,yq) = \tilde{u}(yq)\int_0^q \hat{u}(yt)\left(\sum_{k\geq 1} k^{k+1}\frac{x^k}{k!}t^{k-1}\right)dt$$

$$T(xq,yq) = \tilde{u}(yq)\int_0^q \hat{u}(yt)\frac{\partial \tilde{u}(xt)}{\partial t}dt.$$

On peut alors relier cette expression à une construction classique sur les séries génératrices exponentielles, le *boxed product* (voir par exemple [61]).

Lemme 33. *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux familles d'objets étiquetés de séries génératrices exponentielles respectives $U(x)$ et $V(x)$, et $\mathcal{W}$ la famille des objets $W = (U,V)$ (W est un couple de deux objets U et V appartenant respectivement à $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$) tels que la plus petite étiquette de W appartient à U. La série génératrice $W(x)$ de $\mathcal{W}$ vérifie alors la relation*

$$W(x) = \int_0^x V(t)\frac{\partial U(t)}{\partial t}dt.$$

Souhaitant montrer que

$$[x^k y^m q^{k+m}](T(xq,yq) + T(yq,xq)) = \frac{(k+m)^{k+m}}{(k+m)!},$$

une preuve combinatoire de cette identité nécessiterait de mettre en évidence deux familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ d'objets vérifiant les propriétés suivantes.

- Pour $k,m \geq 1$, on a $(k+m)^{k+m}$ objets de $\mathcal{F}$ étiquetés sur $[k+m]$ et pour chacun de ces objets F, il existe une partition canonique de ses étiquettes en deux ensembles, notés $E_1(F)$ et $E_2(F)$, de tailles respectives k et m : la série génératrice trivariée de $\mathcal{F}$ est alors
$$\sum_{k,m\geq 1} (k+m)^{k+m} \frac{x^k y^m q^{k+m}}{(k+m)!}.$$
- Il existe deux familles $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ de structures étiquetées, de séries génératrices respectives $\tilde{u}(x)$ et $\hat{u}(x)$, telles que
  - tout objet $G \in \mathcal{G}$ sur $[k+m]$ est un triplet (X,Y,Z) vérifiant $X,Z \in \mathcal{G}_1$ et $Y \in \mathcal{G}_2$
  - on peut partitionner les étiquettes de G en deux ensembles notés $E_1(G)$ et $E_2(G)$, de tailles respectives k et m,
  - les étiquettes de $E_1(G)$ sont les étiquettes de X et Y et celles de $E_2(G)$ celles de Z,
  - la plus petite étiquette de X et Z appartient à Z.

Il faudrait alors établir une bijection entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ vérifiant la propriété suivante : si $F \in \mathcal{F}$ est en bijection avec $G \in \mathcal{G}$, alors $|E_1(F)| = |E_1(G)|$ et $|E_2(F)| = |E_2(G)|$.

2.3 Factorisations du grand cycle

Dans [53], Dénes a établi une correspondance entre arborescences de Cayley sur $[n]$ de racine 1 et factorisations minimales de la permutation circulaire $(1,2,\ldots,n)$ (que nous appelons le *grand cycle*) comme produit de transpositions. Dans cette section, nous proposons une relecture de la preuve du résultat de Dénes due à Moszkowski [122] qui nous permet de relier la famille $\mathcal{A}_{n+1,0}$ à ce problème. On rappelle qu'une transposition sur $[n]$ est une permutation sur $[n]$ qui échange exactement deux éléments, c'est-à-dire une permutation comportant $n-1$ cycles (et donc un cycle de longueur 2 et $(n-2)$ cycles de longueur 1, les *points fixes*).

Définition 34. Soit σ une permutation circulaire sur $[n]$. Une *factorisation minimale* de σ en produit de transpositions est un $(n-1)$-uplet $(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1})$ de transpositions sur $[n]$ tel que $\tau_1 \cdots \tau_{n-1} = \sigma_0$, le produit étant effectué de gauche à droite.

Dans la suite de cette section, nous utilisons le terme factorisation pour désigner une factorisation minimale en produit de transpositions. Par exemple, le produit $\tau_1.\tau_2.\tau_3.\tau_4$ avec $\tau_1 = (3,5)$, $\tau_2 = (3,4)$, $\tau_3 = (2,4)$, $\tau_4 = (1,2)$, est une factorisation de $\sigma = (1,2,4,3,5)$.

Théorème 35. [53] *Le nombre de factorisations minimales de* $(1,2,\ldots,n)$ *est* n^{n-2}.

La preuve donnée par Dénes repose sur la représentation d'un produit de transpositions par un graphe. Soit $\tau_1 \cdots \tau_k$ un produit de k transpositions sur $[n]$. On peut le représenter par un graphe à n sommets étiquetés dans $[n]$ et k arêtes étiquetées dans $[k]$: si $\tau_i = (x,y)$, on a alors une arête étiquetée i reliant x à y.

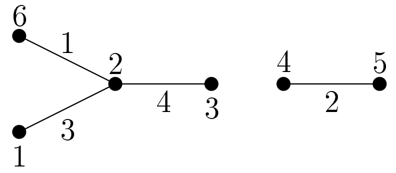


FIG. 2.1 – Graphe associée à (2,6).(4,5).(1,2).(2,3)

Dans [53] (voir aussi les travaux d'Eden et Schützenberger [56]), Dénes montre que la permutation $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_{n-1}$ est un cycle de longueur n si et seulement si ce graphe est une arborescence (on prend 1 pour racine). Par exemple, le produit des 5 transpositions (4,5).(1,6).(2,4).(3,6).(1,4) est une factorisation de (1,3,6,4,5,2) et correspond à l'arborescence représentée dans la figure suivante.

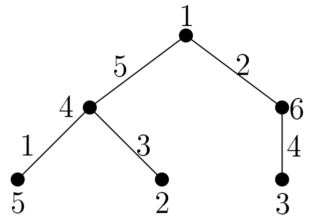


FIG. 2.2 – Arborescence associée à (4,5).(1,6).(2,4).(3,6).(1,4)

On a donc une correspondance entre les factorisations de permutations circulaires sur $[n]$ et les arborescences doublement étiquetées, sur $[n]$ pour les sommets et $[n-1]$ pour les arêtes, de racine 1. Clairement, ces arborescences sont au nombre de $(n-1)!n^{n-2}$. D'autre part, le nombre de permutations circulaires sur $[n]$ est $(n-1)!$. Le résultat découle directement de ces deux observations.

Alors que le théorème 35 suggère qu'il existe une bijection directe entre les factorisations du grand cycle et les arborescences de Cayley de racine 1, la preuve précédente est basée sur une correspondance entre deux ensembles plus larges (factorisations des n-cycles et arborescences doublement étiquetées). La première preuve bijective directe du théorème 35 est due à Moszkowski [122] (voir aussi les travaux de Goulden et Pepper [81]). Nous proposons une nouvelle description de la bijection de Moszkowski, qui présente les avantages suivants.

- Elle est plus intuitive, car basée uniquement sur des manipulations d'arborescences : la preuve de sa validité est immédiate contrairement à la preuve originale de Moszkowski.

– Elle permet de donner une interprétation de n^n en termes de factorisations du grand cycle.

La bijection de Moszkowski. Cette bijection s'appuie sur la propriété suivante que vérifie une arborescence représentant une factorisation de $(1,2,\ldots,n)$ (propriété découlant directement de la définition d'une factorisation du grand cycle).

Propriété 36. Soit A une arborescence sur $[n]$ doublement étiquetée et de racine 1. Pour un sommet x de A, on note $C_x = (a_0,\ldots,a_k)$ la suite des arêtes croissantes constituant le plus long chemin issu de x où a_0 est la plus petite arête incidente à x (éventuellement l'arête reliant x à son père) et, si l'arête a_j $(j < k)$ joint y à z, alors a_{j+1} est la plus petite arête incidente à z supérieure à a_j. Ainsi A représente une factorisation du grand cycle si et seulement, pour tout sommet x de A, le sommet terminal de C_x est $x+1$.

Cette propriété des arborescences associées à une factorisation du grand cycle induit la description suivante de la bijection de Moszkowski, basée sur un réétiquetage des sommets de A.

Algorithme 3: Des arborescences vers les factorisations

Données : A: arborescence de racine 1
début
  pour chaque sommet x de A différent de 1 **faire**
    étiqueter l'arête reliant x à son père par $x-1$;
  $x := 1$;
  pour i allant de 2 à n **faire**
    déterminer le chemin C_x;
    réétiqueter le sommet terminal y de C_x par i;
    $x := y$ (x est le sommet que l'on vient d'étiqueter i);
fin

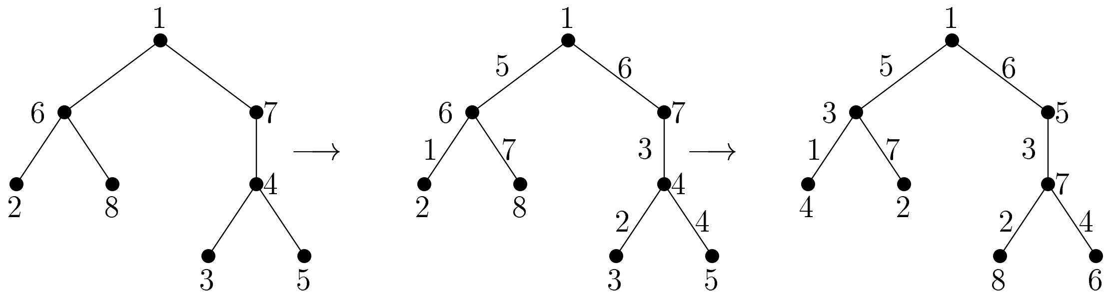


FIG. 2.3 – Transformation d'une arborescence en factorisation du grand cycle

Pour prouver la validité de cet algorithme, il suffit de s'assurer qu'il n'existe pas deux sommets x et y tels que C_x et C_y ont même sommet terminal. Supposons qu'il existe deux sommets x et y tels que C_x et C_y aient au moins un sommet en commun, et soit z leur premier sommet commun. Supposons de plus que C_x (resp. C_y) arrive en z par l'arête a (resp. b).

– z ne peut être le sommet terminal des deux chemins C_x et C_y : en effet si $a > b$ (resp.

$b > a$), C_y (resp. C_x) ne s'arrête pas en z.

– Si z n'est le sommet terminal d'aucun des deux chemins, C_x et C_y ne quittent pas z par la même arête c (sinon, $c > a$ et $c > b$, et on a donc soit $c > a > b$, ce qui implique que C_x (resp. C_y) se poursuit par une arête d'étiquette comprise entre $a+1$ et c (resp. $b+1$ et a)), soit $c > b > a$, ce qui implique que C_x (resp. C_y) se poursuit par une arête d'étiquette comprise entre $a+1$ et b (resp. $b+1$ et c)), et A étant acyclique, il ne peuvent avoir le même sommet terminal.

On a donc réétiqueté tous les sommets de A, et par construction, A' est bien une factorisation du grand cycle. De plus, le réétiquetage des sommets de A étant induit par l'étiquetage des arêtes de A, et ce dernier étant donné par l'étiquetage des sommets de A, deux arborescences différentes ne peuvent produire la même factorisation du grand cycle.

La construction inverse est immédiate. Soit A' une arborescence doublement étiquetée représentant une factorisation de $(1,2,\ldots,n)$. Pour obtenir l'arborescence de racine 1 engendrant A' par l'algorithme précédent, il suffit de remplacer chaque sommet x différent de 1 par l'étiquette de l'arête menant à son père, augmentée de 1 (l'étiquette de la racine reste donc 1).

Interprétation de n^n en termes de factorisations du grand cycle. Il découle de ce qui précède que le nombre de factorisations de $(1,2,\ldots,n)$ ne comportant qu'une seule occurrence de 1 (c'est-à-dire une seule transposition agissant sur 1) est égal au nombre d'arborescences sur $[n]$ de racine 1 n'ayant qu'un fils, c'est-à-dire au nombre d'arborescences sur $[n-1]$, soit $(n-1)^{n-2}$. On peut alors déduire de l'algorithme précédent le résultat suivant, concernant les factorisations du grand cycle ne comportant qu'une seule transposition contenant 1.

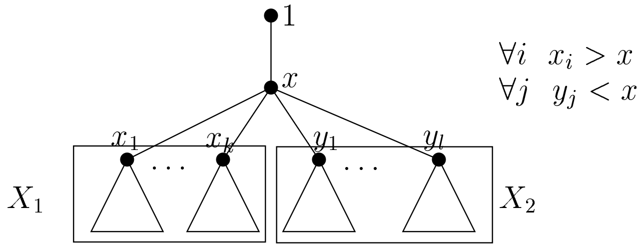
Proposition 37. *Soit $f_{n,k}$ ($k \in [n]$ et $k \neq 1$) le nombre de factorisations de $(1,2,\ldots,n)$ ne comportant qu'une seule transposition contenant 1 et de la forme $(1,k)$.*

$$f_{n,2} = f_{n,n} = (n-2)^{n-2},$$

et si $(n-1) \geq k \geq 3$

$$f_{n,k} = \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{l} \binom{n-1}{l} \binom{n-1-l}{k-r+1} (r-1)^{k-2-r} (l-r)(n-k)^{n-1-k-l+r}.$$

Preuve. On a vu précédemment qu'une factorisation de $(1,2,\ldots,n)$ ne comportant qu'une seule transposition contenant 1 est représentée par une arborescence sur $[n]$ de racine 1 n'ayant qu'un seul fils (ce qui est équivalent à une arborescence sur $[n-1]$). Par définition de la représentation d'une factorisation du grand cycle par une arborescence, l'image k de 1 dans la transposition contenant 1 correspond à l'étiquette du fils de la racine dans cette arborescence, après application de l'algorithme de réétiquetage. Soit x le fils de 1 dans l'arborescence initiale A (qui sera ensuite réétiqueté par k) et X_1 (resp. X_2) l'ensemble des sommets y de A tels que le chemin de x vers y commence par une arête croissante (resp. décroissante).



En se souvenant que l'étiquetage des arêtes de A est donné par celui des sommets et de la définition des chemins C_y, on obtient les propriétés suivantes.

- Tout chemin C_y passant par un sommet de X_1 a son sommet terminal dans $X_1 \cup \{x\}$: si C_y passe par x, soit il se termine en x, soit il arrive en x par une arête d'étiquette supérieure ou égale à x et ne peut donc pas se poursuivre par une arête menant à un sommet de X_2 ou au sommet 1.
- On en déduit que le sommet terminal de C_1 est soit x, soit un sommet de X_1, car la première arête suivie après l'arête $x-1$ ne peut mener qu'à un sommet de X_1.
- Pour tout $y \in X_2$, le sommet terminal de C_y appartient à $X_2 \cup \{1\}$: si C_y passe par x, il se poursuit obligatoirement par l'arête menant de x à 1 (étiquetée par $x-1$) et se termine ainsi. Il ne peut donc passer par un sommet de X_1.
- On en déduit que si $X_2 \neq \emptyset$, le sommet terminal de C_x est dans X_2 car la première arête de C_x mène vers un sommet de X_2 (si $X_2 = \emptyset$, C_x est constitué de la seule arête reliant x à la racine 1).

De ces propriétés, on déduit que la nouvelle étiquette du sommet x fournie par l'algorithme précédent est la valeur $2 + |X_1|$. Ainsi, la seule transposition contenant 1 est (1,2) si tous les fils de x sont inférieurs à x dans A. Le théorème 16 implique alors que $f_{n,2} = (n-2)^{n-2}$. Inversement, x est réétiqueté n par l'algorithme si tous les fils de x sont supérieurs à x et on a bien $f_{n,n} = (n-2)^{n-2}$. Pour $k \neq 2$ et $k \neq n$, $f_{n,k}$ est le nombre d'arborescences sur $[n]$ de racine 1 ayant un seul fils noté x et telles que $|X_1| = k$. On construit une telle arborescence de la façon suivante :

- choisir un ensemble $L = (x_1, \ldots, x_l)$ de l sommets différents de 1 qui correspondront au sommet x et à ses fils (on explique ainsi la somme sur l) ;
- pour chacun des sommets x_r de L, considérer le cas des arborescences telles que $x = x_r$ et les fils de x sont $L/\{x_r\}$ (on explique ainsi la somme sur r et on remarque que le sommet x a alors exactement $r-1$ fils qui lui sont inférieurs et $l-r$ fils qui lui sont supérieurs) ;
- en rappelant qu'on énumère les arborescences telles que $|X_1| = k$, il reste à choisir $(k-r+1)$ sommets parmi les $(n-1-l)$ restants, à greffer sous les sommets $(x_1, \ldots, x_{r-1})$ une forêt de k sommets comportant $(r-1)$ arborescences de racines respectives $x_1, \ldots, x_{r-1}$, et à greffer sous les sommets $(x_{r+1}, \ldots, x_l)$ une forêt de $n-1-k$ sommets comportant $(l-r)$ arborescences de racines respectives $x_{r+1}, \ldots, x_l$: le résultat découle directement de cette construction et du théorème 11.

□

2.4 Arborescences ordonnées, cycliques et planes

La simplicité du résultat établissant que le nombre d'arborescences de Cayley sur $[n+1]$ dont la racine est inférieure à ses fils est n^n incite à penser qu'il existe une preuve formelle, qui devrait pouvoir s'appliquer à d'autres familles d'arborescences. C'est le sujet de cette section. Dans un premier temps, nous énonçons un lemme général pour traiter ce problème, avant de l'appliquer aux arborescences ordonnées, cycliques et planes.

2.4.1 Un lemme général

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux familles d'objets combinatoires étiquetés, de séries génératrices exponentielles respectives

$$U(x) = \sum_{k\geq 0} u_k \frac{x^k}{k!} \text{ et } V(x) = \sum_{k\geq 0} v_k \frac{x^k}{k!},$$

et $u_0 \neq 0$. On introduit alors la série formelle $W(x)$ définie par

$$W(x) = \int_0^x V(t)\ dt = \sum_{k\geq 1} v_{k-1} \frac{x^k}{k!}$$

et les familles suivantes de structures arborescentes.

- $\mathcal{T}$ est la famille des $\mathcal{U}$-arborescences, de série génératrice $T(x) = \sum_{k\geq 0} t_k \frac{x^k}{k!}$.
- $\mathcal{R}$ est la famille des arborescences telles que les fils d'un sommet sont munis d'une $\mathcal{V}$-structure si ce sommet est la racine et d'une $\mathcal{U}$-structure sinon.
- $\mathcal{R}_0$ est la famille des arborescences de $\mathcal{R}$ telles que la racine est inférieure à ses fils. On note $R_0(x) = \sum_{k\geq 0} r_{k,0} \frac{x^k}{k!}$ sa série génératrice.

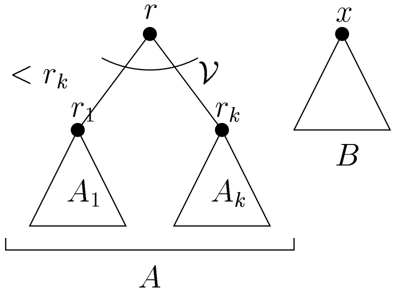
Lemme 38. *La série génératrice exponentielle des arborescences de $\mathcal{R}_0$ vérifie l'équation fonctionnelle*

$$R_0(x) = \frac{x}{T(x)} W(T(x)).$$

Preuve. On veut donc prouver que $R_0(x)T(x) = xW(T(x))$ [1]. Pour cela, on interprète les deux membres de cette identité de la façon suivante.

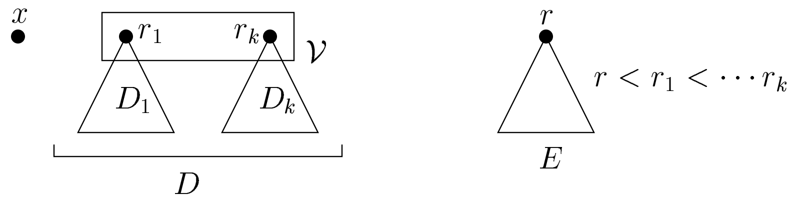
Une $(\mathcal{R}_0.\mathcal{T})$-structure sur $[n]$ est un couple (A,B) tel que A est une arborescence dont la racine r est inférieure à ses fils, ces derniers, structurés en une $\mathcal{V}$-assemblée, étant les racines d'arborescences de $\mathcal{T}$ $A_1, \ldots ,A_k$, et B est une arborescence de $\mathcal{T}$.

$r < r_1 < \cdots < r_k$



1. La preuve que nous donnons ici, différente de la preuve présentée dans [35], nous a été indiquée par Volker Strehl.

Pour les structures comptées par la série $xW(T(x))$ (on note $\mathcal{W}$ la famille de structures comptées par $W(x)$), on peut tout d'abord déduire du lemme 33 (boxed product) qu'une $\mathcal{W}$-structure sur $[n]$ est un couple $(1,C)$ où C est une $\mathcal{V}$-structure sur $\{2,\dots,n\}$. On en déduit que $xW(T(x))$ est la série génératrice des triplets (x,D,E) tels que $x \in [n]$, E est une arborescence de $\mathcal{T}$ et D une $\mathcal{V}$-assemblée d'arborescences de $\mathcal{T}$ $(D_1,\dots,D_k)$ et que la racine y de E est inférieure aux racines des D_i.



Pour prouver le résultat voulu, il suffit alors de remarquer les faits suivants :

- dans (x,D,E), en échangeant les sommets x et r du triplet (x,D,E) et en enracinant la $\mathcal{V}$-assemblée $D_1,\dots,D_k$ en r, on obtient le couple (A,B) (avec $A_i = D_i$) ;
- dans (A,B), en déracinant A et en échangeant les sommets x et r, on obtient le triplet (x,D,E) (avec $D_i = A_i$).

□

Corollaire 39. *Le nombre d'arborescences de $\mathcal{R}_0$ à n sommets est*

$$[x^n]R_0(x) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]\left\{\left(V(x)U(x) - W(x)\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right)(U(x))^{n-2}\right\}.$$

Preuve. En remarquant que

$$T(x) = xU(T(x))$$

on en déduit que

$$R_0(x) = \left(\frac{W}{U}\right)(T(x)).$$

Il suffit alors d'appliquer la formule d'inversion de Lagrange (théorème 14, page 18), avec $F(x) = T(x)$, $G(x) = U(x)$ et $H(x) = (W/U)(x)$. □

2.4.2 Application aux arborescences ordonnées, cycliques et planes

Prenons par exemple les arborescences de Cayley. On a alors $U(x) = V(x) = e^x$ et $W(x) = e^x - 1$. On déduit alors du Corollaire 39 que le nombre d'arborescences de Cayley à n sommets telles que la racine est inférieure à ses fils est

$$\frac{n!}{n}[x^{n-1}]e^{(n-1)x} = (n-1)^{n-1}.$$

Proposition 40. *Le nombre d'arborescences ordonnées à n sommets telles que la racine est inférieure à ses fils est*

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n+k-1)!}{(n-k-1)k!}.$$

Preuve. Dans le cas des arborescences ordonnées de racine inférieure à ses fils, on a

$$U(x) = V(x) = \frac{1}{1-x} \Longrightarrow W(x) = -\ln(1-x).$$

On déduit du Corollaire 39, que le nombre d'arborescences ordonnées à n sommets ($n \geq 1$) de racine inférieure à ses fils est

$$\frac{n!}{n}[x^{n-1}]\left(\frac{1}{1-x}\right)^n (1+\ln(1-x)) =$$

$$(n-1)!\left([x^{n-1}](1-x)^{-n} + [x^{n-1}](1-x)^{-n}\ln(1-x)\right) =$$

$$(n-1)!\left(\binom{2n-2}{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{n-1-k}\binom{n+k-1}{k}\right) =$$

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n+k-1)!}{(n-k-1)k!}.$$

□

$\mathcal{C}$ désignant la famille des listes circulairement ordonnées, on appelle *arborescences cycliques* les arborescences $\mathcal{C}$-enrichies et on note $AC(x)$ leur série génératrice exponentielle.

Proposition 41. *Le nombre d'arborescences cycliques sur $[n]$ telles que la racine est inférieure à ses fils est*

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}(-1)^{n-1-k}s(n-1,k)\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-2)!}{(n-1-k)!}(-1)^{n-k}s(n,k)\right),$$

où les $s(n,k)$ sont les nombres de Stirling de première espèce.

Preuve. On a (voir [16] par exemple)

$$U(x) = V(x) = 1-\ln(1-x) \Longrightarrow W(x) = (1-x)\ln(1-x) + x.$$

On déduit alors du Corollaire 39, que le nombre d'arborescences cycliques à n sommets ($n \geq 1$) de racine inférieure à ses fils est

$$\frac{n!}{n}[x^{n-1}]\left\{(1-\ln(1-x))^n - \frac{(1-\ln(1-x))^{n-2}}{(1-x)}\right\}. \tag{2.13}$$

En remarquant que

$$\frac{1}{n-1}\frac{\partial((1-\ln(1-x))^{n-1})}{\partial x} = \frac{(1-\ln(1-x))^{n-2}}{(x-1)},$$

on a

$$[x^{n-1}]\frac{(1-\ln(1-x))^{n-2}}{(x-1)} = \frac{n}{n-1}[x^n](1-\ln(1-x))^{n-1}. \tag{2.14}$$

Il suffit maintenant de rappeler (voir [82, Table 351] par exemple) que

$$\left(\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^k = \sum_{i\geq 0} k!(-1)^{i-k}s(i,k)\frac{x^i}{i!},$$

pour obtenir

$$[x^{n-1}](1-\ln(1-x))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!(-1)^{n-1-k}s(n-1,k)\frac{1}{(n-1)!}, \tag{2.15}$$

et le résultat est une conséquence directe de (2.13), (2.14) et (2.15). □

On appelle *arborescences planes* les arborescences plongées dans un plan orienté [16]. Cette famille est caractérisée par l'enrichissement suivant : la fibre de la racine est munie d'une $\mathcal{C}$-structure et la fibre de tout autre sommet est munie d'une $\mathcal{L}$-structure. On note $\mathcal{P}$ la famille des arborescences planes et $P(x)$ leur série génératrice.

Proposition 42. *Le nombre d'arborescences planes sur $[n]$ à n sommets telles que la racine est inférieure à ses fils est*

$$\left(2\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2+k)!}{k!}\frac{n-1}{n-1-k}\right) - \frac{(2n-3)!}{(n-2)!}.$$

Preuve. On a

$$U(x) = \frac{1}{(1-x)},\ V(x) = 1-\ln(1-x) \Longrightarrow W(x) = (1-x)\ln(1-x)+x.$$

On déduit alors du Corollaire 39, que le nombre d'arborescences planes à n sommets $(n \geq 1)$ de racine inférieure à ses fils est

$$\frac{n!}{n}[x^{n-1}]\left\{-x\left(\frac{1}{1-x}\right)^n - 2\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1}\ln(1-x)\right\}.$$

On a

$$[x^{n-1}]\left\{-x\left(\frac{1}{1-x}\right)^n\right\} = -[x^{n-2}]\left(\frac{1}{1-x}\right)^n = -\binom{2n-3}{n-2}.$$

D'autre part,

$$-[x^{n-1}]\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1}\ln(1-x) = [x^{n-1}]\left(\sum_{k\geq 0}\binom{n-2+k}{k}x^k\right)\left(\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}\right)$$

$$\Longrightarrow -[x^{n-1}]\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1}\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2+k}{k}\frac{1}{n-1-k}$$

et on obtient le résultat voulu. □

2.5 Conclusion

Le principal résultat de ce chapitre a trait à la prise en compte d'un paramètre sur les arborescences qui n'a pas été considéré jusqu'à présent, le nombre de fils de la racine qui lui sont inférieurs. Son étude s'avère intéressante du point de vue énumératif, notamment pour la famille $\mathcal{A}_{n,0}$, car ce paramètre permet d'expliquer combinatoirement plusieurs identités faisant intervenir n^n.

Deux questions. Parmi les principales questions relatives à l'étude que nous avons menée dans ce chapitre, il serait intéressant de trouver une explication combinatoire de l'intrigante identité (2.2), due à Goulden et Jackson. Il nous semble que les éléments que nous avons apportés dans ce chapitre peuvent permettre de résoudre ce problème.

Le lemme 38 permet d'exprimer la série génératrice d'une famille d'arborescences telles que la racine est inférieure à ses fils en fonction de la série de la même famille d'arborescences sans conditions sur la racine. Il serait intéressant d'étendre ce résultat aux arborescences dont le nombre de fils de la racine qui lui sont inférieurs est fixé.

Arrangements d'hyperplans. Nous avons rapidement mentionné en introduction que la famille $\mathcal{A}_{n,0}$ apparaissait dans des travaux de Gessel sur les arrangements d'hyperplans (non publiés mais cités par Athansiadis et Linusson dans [9]), et plus particulièrement dans l'arrangement d'hyperplans défini par Shi dans [140] :

- on note S_n $(n > 0)$ l'arrangement d'hyperplans de R^n définis par les équations $x_i - x_j = 0$ et $x_i - x_j = 1$, pour $1 \leq i < j \leq n$.

Une *région* de S_n est une composante connexe de l'espace obtenu en supprimant de R^n les hyperplans de S_n. Stanley [145, 147] (voir aussi [9]) a montré que le nombre de régions de S_n est $(n+1)^{n-1}$ en établissant une bijection entre ces régions et les *fonctions de parking sur* $[n]$ que l'on sait être au nombre de $(n+1)^{n-1}$.

Gessel a introduit la notion de *région bornée* : une région de S_n est bornée si son intersection avec l'hyperplan défini par $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ est bornée en tant que région de l'espace Euclidien. Il a établi une bijection entre ces régions et un sous-ensemble des fonctions de parking, *les fonctions de parking premières sur* $[n]$ et a montré, de manière formelle que ces fonctions sont au nombre de n^n (Kalikow a donné une preuve bijective de ce résultat [97]). Il a de plus établi une bijection entre les fonctions de parking premières et les forêts d'arborescences de Cayley sur $n+1$ telles que la racine de la plus petite arborescence n'a aucun fils. Ces forêts sont clairement équivalentes à $\mathcal{A}_{n+1,0}$ et la preuve du lemme 17 fournit donc une preuve bijective de la formule énumérant les régions bornées de S_n.

De plus, si on note R_0 l'unique région de S_n telle que $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ et $x_1 - x_n < 1$, Stanley a introduit une notion de distance d'une région R de S_n par rapport à R_0 et a montré que le nombre de régions de S_n à distance d de R_0 est égal au nombre d'arborescences de Cayley de racine 1 ayant $\binom{n}{2} - d$ inversions. Dans le chapitre suivant, qui poursuit l'étude combinatoire de $\mathcal{A}_{n,0}$, nous nous intéressons à l'énumération des inversions dans les arborescences $\mathcal{A}_{n,0}$, que l'on peut donc interpréter en termes de distance des régions bornées de S_n par rapport à R_0.

Cependant, tous les résultats sus-cités établissent un lien indirect entre régions de S_n et arborescences de Cayley, car ils sont basés sur des bijections entre ces régions et les fonctions de parking (il existe plusieurs bijections classiques entre arborescences et fonctions de parking [103, pages 732-733]). Il serait donc intéressant d'établir un lien combinatoire direct entre arborescences et régions de S_n, qui fasse naturellement apparaître le lien entre les régions bornées et la famille $\mathcal{A}_{n,0}$ et de regarder comment sont transportés les paramètres classiques des arborescences (racine, degré de la racine, arêtes décroissantes, etc) sur les régions de S_n.

Chapitre 3

Polynôme énumérateur des inversions

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au *polynôme énumérateur des inversions* des arborescences de Cayley dont la racine est inférieure à ses fils. Nous obtenons plusieurs généralisations de résultats de Kreweras, concernant le polynôme énumérateur des inversions des arborescences de Cayley de racine 1, en particulier une nouvelle interprétation combinatoire des nombres d'Entringer et des nombres d'Euler.

Notation. Tout au long de ce chapitre, nous considérons des arborescences de Cayley que nous nommons simplement arborescences.

3.1 Inversions et arborescences

Définition 43. Une *inversion* dans une arborescence A est un couple (x,y) de sommets tels que $x > y$ où y est un descendant de x. On note $inv(A)$ le nombre d'inversions de A.

Par exemple, l'arborescence de la figure suivante comporte 6 inversions : (7,2), (7,3), (4,1), (4,2), (4,3), (9,6).

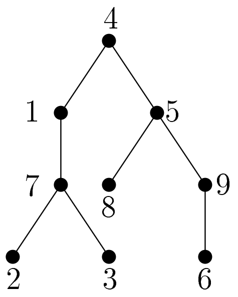


FIG. 3.1 – Une arborescence à 6 inversions

Mallows et Riordan [116] ont été les premiers à considérer ce paramètre, dans le cas des arborescences de racine 1, et à introduire la notion de *polynôme énumérateur des inversions.*

Définition 44. Soit $\mathcal{F}_n$ une famille d'arborescences sur $[n]$. Le polynôme énumérateur des inversions de $\mathcal{F}_n$ est défini par

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}_n}(q) = \sum_{A \in \mathcal{F}_n} q^{inv(A)}.$$

On note $\mathcal{P}_n(q)$ le polynôme énumérateur des inversions des arborescences de racine 1.

Le polynôme énumérateur des inversions des arborescences de racine 1 est relié à de nombreux problèmes combinatoires, comme le polynôme de Tutte pour certaines familles de graphes [63], les fonctions de parking [106, 121] et les fonctions de k-parking [166], l'activité externe d'une arborescence [10], ou les arrangements d'hyperplans [147, 145], comme nous l'avons déjà mentionné en conclusion du chapitre précédent. Pour des familles autres que les arborescences de Cayley, il existe peu de résultats. On peut essentiellement citer les travaux de Gessel, Sagan et Yeh [64] et de Chen [40] pour les arborescences ordonnées, cycliques et planes de racine 1.

La première étude détaillée du polynôme $\mathcal{P}_n(q)$ est due à Kreweras [106] qui obtient notamment la formule de récurrence suivante.

Proposition 45. *Le polynôme énumérateur des inversions des arborescences de racine* 1 *vérifie la relation de récurrence :*

$$\mathcal{P}_1(q) = 1, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{P}_{n+1}(q) = \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} \left(\sum_{i=0}^{m-1} q^i \right) \mathcal{P}_m(q)\mathcal{P}_{n+1-m}(q). \tag{3.2}$$

Cette formule est obtenue en supprimant l'arête reliant la racine 1 au fils qui contient le plus grand sommet dans la sous-arborescence qui en est issue. Nous reprenons cette technique dans la section suivante pour l'étendre au cas des arborescences de $\mathcal{A}_{n,0}$. Kreweras montre qu'évalué en $q = -1{,}0{,}1{,}2$, le polynôme $\mathcal{P}_n(q)$ prend des valeurs remarquables, qui font notamment intervenir les nombres d'Euler et le nombre de graphes étiquetés simples connexes.

Définition 46. On note e_n le $n^{ème}$ nombre d'Euler ; ces nombres sont donnés par la série génératrice

$$\sum_{n \geq 0} e_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)},$$

ou par la récurrence

$$e_0 = 1,\ e_{n+1} = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2m} e_{2m} e_{n-2m}.$$

Proposition 47. *Soit* $n > 0$.

$$\mathcal{P}_n(0) = (n-1)!, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{P}_n(1) = n^{n-2}, \tag{3.4}$$

$$\mathcal{P}_n(-1) = e_{n-1}. \tag{3.5}$$

Les preuves des identités (3.3) et (3.4) sont immédiates :

- $\mathcal{P}_n(0)$ est le nombre d'arborescences sur $[n]$ ne comportant aucune inversion, c'est-à-dire le nombre d'arborescences croissantes : $(n-1)!$ (voir la preuve de la proposition 30),
- $\mathcal{P}_n(1)$ est le nombre d'arborescences sur $[n]$ de racine 1, c'est-à-dire n^{n-2} (Corollaire 8).

La preuve de l'identité (3.5) donnée par Kreweras est basée sur les récurrences satisfaites par $\mathcal{P}_n(q)$ et par les nombres d'Euler. Or les nombres d'Euler énumèrent de nombreux objets combinatoires, comme par exemple les permutations alternantes [107] ou les arborescences croissantes paires [162]. Pansiot [123] a utilisé ce dernier point pour donner une preuve combinatoire de (3.5), basée sur la technique suivante :

- exhiber une sous-famille $\mathcal{B}_n$ de $\tilde{\mathcal{A}}_n$ (les arborescences sur $[n]$ de racine 1) de cardinal e_{n-1} telle que toute arborescence de $\mathcal{B}_n$ a un nombre pair d'inversions ($\mathcal{B}_n$ est la famille des arborescences croissantes paires, que nous définissons dans la section suivante),
- définir une involution ψ sur $\tilde{\mathcal{A}}_n$ privé de $\mathcal{B}_n$ telle que le nombre d'inversions de A et $\psi(A)$ diffère de 1.

Nous utilisons une technique similaire dans le section suivante pour prouver un résultat analogue pour le polynôme associé aux arborescences de $\mathcal{A}_{n,0}$.

Définition 48. On appelle graphe simple étiqueté sur $[n]$ un graphe à n sommets étiquetés par $\{1,\dots,n\}$, n'ayant ni boucle ni arête multiple. On note $\mathcal{G}_n$ l'ensemble de tels graphes connexes sur $[n]$ et $g_n = |\mathcal{G}_n|$.

Proposition 49. *Soit $n > 0$.*

$$\mathcal{P}_n(1+q) = \sum_{G\in\mathcal{G}_n} q^{a(G)-n+1} \tag{3.6}$$

où $a(G)$ est le nombre d'arêtes de G. On en déduit alors que

$$\mathcal{P}_n(2) = g_n. \tag{3.7}$$

La première preuve de ce résultat est due à Kreweras qui montre que le nombre de graphes connexes simples étiquetés sur $[n]$ satisfait une récurrence similaire à celle de $\mathcal{P}_n(2)$ et en déduit (3.7). Dans [65], Gessel et Wang proposent une preuve bijective de (3.6) basée sur la notion de parcours en profondeur d'un graphe. Nous reprendrons ce principe pour prouver un résultat analogue pour le polynôme associé aux arborescences de $\mathcal{A}_{n,0}$.

Finalement, on peut relier le polynôme des inversions des arborescences au polynôme de Tutte des graphes complets.

Définition 50. Soit G un graphe aux arêtes totalement ordonnées et A une arborescence couvrante de G. Une arête (x,y) de G n'appartenant pas à A (resp. appartenant à A) est *externe* (resp. *interne*) si elle est la plus grande arête de l'unique cycle du graphe $A \cup (x,y)$ (resp. cocycle de $\{G - A\} \cup (x,y)$) contenant (x,y). On note $EA_G(A)$ (resp. $IA_G(A)$) l'ensemble des arêtes externes (resp. internes) de G relativement à A.

Le polynôme de Tutte de G est alors défini par

$$\mathcal{T}_G(u,q) = \sum_A u^{|IA_G(A)|} q^{|EA_G(A)|},$$

où la somme est sur toutes les arborescences couvrantes A de G.

Tutte [156] a notamment montré que ce polynôme ne dépendait pas de l'ordre choisi sur les arêtes de G. Si on note K_n le graphe complet à n sommets, on a alors le résultat suivant [10, 63].

Proposition 51. *Soit $n > 0$.*

$$\mathcal{T}_{K_n}(1,q) = \mathcal{P}_n(q) \tag{3.8}$$

3.2 Polynôme des inversions de $\mathcal{A}_{n,0}$

Dans cette section, nous nous intéressons au polynôme des inversions des arborescences dont la racine est inférieure à ses fils, que nous notons $\tilde{\mathcal{P}}_n(q)$. Plus précisément, nous étudions la famille $\mathcal{A}_{n,0,r}$ des arborescences de $\mathcal{A}_{n,0}$ ayant pour racine $r \in [n-1]$, dont nous notons $\tilde{\mathcal{P}}_{n,r}(q)$ le polynôme énumérateur des inversions (on a donc $\tilde{\mathcal{P}}_{n,1}(q) = \mathcal{P}_n(q)$). Pour ces polynômes, nous obtenons des généralisations des propositions 45, 47, 49 et 51 (en posant $r = 1$ dans nos résultats, on retrouve les résultats de Kreweras).

Dans un premier temps, nous nous intéressons à une formule de récurrence pour ce polynôme et à son évaluation en 0, 1 et 2. Nous relions notamment cette dernière valeur $\tilde{\mathcal{P}}_{n,r}(2)$ à l'énumération de graphes simples connexes étiquetés sur $[n]$ tels que le sommet r est inférieur à ses voisins. Nous concluons ce paragraphe en reliant $\tilde{\mathcal{P}}_{n,r}$ au polynôme de Tutte de certains graphes dérivés du graphe complet. Dans un deuxième temps, nous montrons que la valeur de ce polynôme en -1 est liée aux nombres d'Entringer (qui raffinent les nombres d'Euler). On peut noter que la plupart des résultats de Kreweras sur $\mathcal{P}_n(q)$ s'interprètent en termes de graphes étiquetés, et que les généralisations que nous proposons pour $\tilde{\mathcal{P}}_n(q)$ s'interprètent naturellement en termes de graphes tels que le sommet r est inférieur à tous ses voisins.

3.2.1 Récurrence pour $\tilde{\mathcal{P}}_{n,r}$, évaluation en 0, 1 et 2 et lien avec le polynôme de Tutte

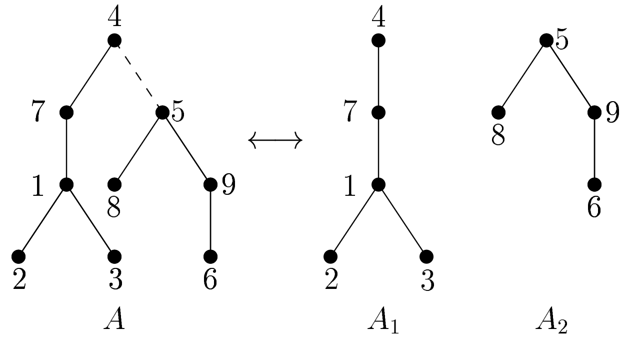
Proposition 52. *Le polynôme énumérateur des inversions des arborescences de $\mathcal{A}_{n,0,r}$ vérifie la relation de récurrence :*

$$\tilde{\mathcal{P}}_{r,r}(q) = \begin{cases} 1 \text{ si } r = 1, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_{n+1,r}(q) = \sum_{m=1}^{n+1-r} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n-r}{m-1} \binom{r-1}{k} \left(\sum_{i=0}^{m-1} q^{2k+i} \right) \tilde{\mathcal{P}}_{k+m,1}(q) \tilde{\mathcal{P}}_{n',r'}(q), \tag{3.10}$$

où $n' = (n+1-m-k)$ et $r' = (r-k)$.

Preuve. La preuve de ce résultat est basée sur le même principe que la démonstration du cas $r = 1$ exposée par Kreweras dans [106]. Tout d'abord, la preuve de (3.9) est immédiate. Ensuite, soit A une arborescence de $\mathcal{A}_{n+1,0,r}$ et x le seul fils de la racine r situé sur le chemin allant de r à $n+1$. En supprimant l'arête reliant r et x, on obtient une forêt à deux arborescences (A_1,A_2) telle que r est la racine de A_1 et est inférieure à ses fils, x est la racine de A_2 et $n+1$ appartient à A_2 (on peut avoir $x = n+1$).



Si on note, pour une arborescence A et un entier r, $|A|_{>r}$ (resp. $|A|_{<r}$) le nombre de sommets de A supérieurs (resp. inférieurs) à r, on a alors

$$inv(A) = inv(A_1) + inv(A_2) + |A_2|_{<r}.$$

En posant $k = |A_2|_{<r}$ et $m = |A_2|_{>r}$ ($m \geq 1$), on peut dire que A_1 comporte $n' = (n + 1 - m - k)$ sommets, dont exactement $r' = (r - 1 - k)$ sont inférieurs à la racine r, ce qui explique ainsi le terme $\tilde{\mathcal{P}}_{n',r-k}(q)$ de (3.10), polynôme énumérant les inversions de A_1. Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_{k+m}$ les sommets de A_2 et x_i sa racine. En échangeant successivement les sommets x_i et x_{i-1}, puis x_{i-1} et x_{i-2}, ..., puis x_2 et x_1, on obtient une arborescence A_2' de racine x_1 (c'est-à-dire dont la racine est le plus petit sommet). En remarquant que chaque échange de deux sommets consécutifs x_j et x_{j-1} diminue le nombre d'inversions de 1 (x_j, situé à la racine, est échangé avec x_{j-1} qui lui est inférieur), on constate que $inv(A_2') = inv(A_2) + i - 1$, les valeurs possibles pour i étant comprises entre $k+1$ et $k+n$ car la racine x_i de A_2 est supérieure à r et $k = |A_2|_{<r}$. En rappelant que le nombre d'inversions de la forme (r,x) avec x dans A_2 est $k = |A_2|_{<r}$, on obtient l'explication du terme

$$\left(\sum_{i=0}^{m-1} q^{2k+i}\right) \tilde{\mathcal{P}}_{k+m,1}(q),$$

et donc du résultat annoncé. □

En posant $r = 1$, on a alors $k = 0$ et on retrouve bien le résultat de la proposition 45.

Proposition 53. *Soient $n > 0$ et $0 < r < n$.*

$$\tilde{\mathcal{P}}_{n,r}(0) = \begin{cases} (n-1)! \text{ si } r = 1, \\ 0 \text{ sinon}, \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_{n,r}(1) = (n-r)n^{n-r-1}(n-1)^{r-2}. \tag{3.12}$$

Preuve. $\tilde{\mathcal{P}}_{n,r}(0)$ est le nombre d'arborescences croissantes de racine r inférieure à ses fils. Une arborescence croissante étant obligatoirement de racine 1, on a immédiatement la preuve de (3.11). $\tilde{\mathcal{P}}_{n,r}(1)$ est le nombre d'arborescences de $\mathcal{A}_{n,0,r}$. L'identité (3.12) découle alors du théorème 24. □

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du fait que $|\mathcal{A}_{n,0}| = (n-1)^{n-1}$.

Corollaire 54. *Soit $n > 0$.*

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(0) = (n-1)!, \tag{3.13}$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(1) = (n-1)^{n-1}. \tag{3.14}$$

On note $\mathcal{G}_{n,r}$ l'ensemble des graphes simples connexes étiquetés sur $[n]$ tels que le sommet r est inférieur à tous ses voisins (sommets reliés à r par une arête), et $g_{n,r} = |\mathcal{G}_{n,r}|$.

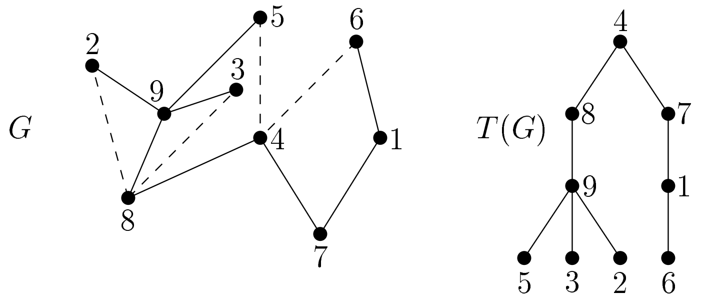
Proposition 55. *Soient $n > 0$ et $0 < r < n$.*

$$\tilde{\mathcal{P}}_{n,r}(1+q) = (1+q)^{2(r-1)} \sum_{G \in \mathcal{G}_{n,r}} q^{a(G)-n+1} \tag{3.15}$$

où $a(G)$ est le nombre d'arêtes de G. Il s'en suit que

$$\tilde{\mathcal{P}}_{n,r}(2) = 4^{(r-1)} g_{n,r}. \tag{3.16}$$

Preuve. Nous étendons la méthode utilisée par Gessel et Wang [65] pour prouver combinatoirement la proposition 49. Soit G un graphe de $\mathcal{G}_{n,r}$. On appelle *arborescence couvrante maximale de G*, notée $T(G)$, l'arborescence obtenue en réalisant un parcours en profondeur de G à partir du sommet r de la manière suivante : si x est le dernier sommet rencontré lors du parcours, le sommet que l'on visite ensuite est le plus grand voisin de x non encore rencontré. Dans l'exemple suivant, les arêtes pleines sont les arêtes empruntées lors d'un tel parcours du graphe G lorsque $r = 4$.



Soit A une arborescence de racine r inférieure à ses fils. On note $C(A)$ l'ensemble des arêtes que l'on peut ajouter à A pour obtenir un graphe de $\mathcal{G}_{n,r}$ d'arborescence couvrante maximale A. Formellement, $C(A)$ est l'ensemble des couples (x,y) ne correspondant pas à des arêtes de A tels que

- si $x = r$ alors (r,y) ne constitue pas une inversion et le fils z de r situé sur le chemin menant à y est tel que (z,y) est une inversion,
- si $x \neq r$ alors il existe z tel que (x,z) est une arête de A et (z,y) est une inversion.

Dans l'exemple, $C(T(G)) = \{(4,5),(4,6),(8,2),(8,3),(8,5)\}$. On constate que chaque inversion (u,v) de A induit un couple de $C(A)$ sauf lorsque

- $u = r$: $r-1$ inversions sont de cette forme
- u est un fils de la racine r et $v < r$ (les couples (r,v) où $v > r$ ne constituant pas une inversion sont dans $C(A)$) : il y a $r-1$ couples de cette forme puisque $u > r$.

Dans notre exemple, les inversions (8,5), (7,6), (9,2), (9,3) et (9,5) correspondent respectivement à (4,5), (4,6), (8,2), (8,3) et (8,5). On en déduit donc que $|C(A)| = inv(A)-2(r-1)$. Soit $\mathcal{G}_A$ l'ensemble des graphes G tels que $T(G) = A$. Par définition de l'arborescence couvrante maximale d'un graphe et de $C(A)$, on peut dire que, pour une arborescence A donnée, un graphe G appartient à $\mathcal{G}_A$ si et seulement si toutes les arêtes de G non présentes dans A appartiennent à $C(A)$. On en déduit que, si $|A| = n$,

$$\sum_{G\in\mathcal{G}_A} q^{a(G)} = q^{n-1}(1+q)^{inv(A)-2(r-1)},$$

le terme q^{n-1} correspondant aux arêtes de A et le terme $(1+q)^{inv(A)-2(r-1)}$ correspondant aux autres arêtes choisies dans $C(A)$. En sommant sur toutes les arborescences couvrantes maximales, c'est-à-dire sur toutes les arborescences de $\mathcal{A}_{n,0,r}$, on obtient le résultat attendu. □

La preuve du corollaire suivant est alors immédiate.

Corollaire 56. *Soit $n > 0$.*

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(1+q) = \sum_{G\in\mathcal{G}_n} q^{a(G)-n+1}\mathcal{Q}_G(1+q) \tag{3.17}$$

où, si on note $S(G)$ l'ensemble des sommets de G inférieurs à leurs voisins,

$$\mathcal{Q}_G(q) = \sum_{x\in S(G)} q^{2(x-1)}.$$

Si on note $K_{n,r}$ le graphe complet privé des arêtes entre r et les sommets $1,2,\dots,r-1$, on relie alors $\tilde{\mathcal{P}}_{n,r}(q)$ à $\mathcal{T}_{K_{n,r}}(1,q)$.

Proposition 57. *Soient $n > 0$ et $0 < r < n$.*

$$q^{r-1}\mathcal{T}_{K_{n,r}}(1,q) = \tilde{\mathcal{P}}_{n,r}(q) \tag{3.18}$$

Preuve. Soit G un graphe à n sommets et F une forêt couvrante de G. On note $C_G(F)$ l'ensemble des couples (x,y) tels que

- y est un descendant de x dans F, mais pas un fils de x,
- si le chemin allant de x à y dans F commence par l'arête (x,z) alors $z > y$.

Dans [63], Gessel et Sagan ont montré que

$$\mathcal{T}_G(1+u,q) = \sum_F u^{c(F)-1} q^{|C_G(F)|},$$

où $c(F)$ est le nombre d'arborescences de F, la somme portant sur toutes les forêts couvrantes de G. En posant $u = 0$, on en déduit que

$$\mathcal{T}_G(1,q) = \sum_A q^{|C_G(A)|},$$

la somme portant sur toutes les arborescences couvrantes de G. De la même manière que dans la preuve précédente, il suffit alors de remarquer que si $G = K_{n,r}$, toute arborescence couvrante de $K_{n,r}$ vérifie $|C_G(A)| = inv(A) - r + 1$. Comme toute arborescence de $\mathcal{A}_{n,0,r}$ est une arborescence couvrante de $K_{n,r}$, on en déduit le résultat annoncé. □

3.2.2 Évaluation de $\tilde{\mathcal{P}}_{n,0,r}(-1)$

L'évaluation de $\mathcal{P}_n(-1)$ fait apparaître des nombres bien connus, les nombres d'Euler. Il existe plusieurs spécialisations des nombres d'Euler, dont la suite des nombres d'Entringer [59], qui ont de nombreuses interprétations combinatoires en termes de permutations alternantes ou d'arborescences [107, 127, 128].

Définition 58. Les nombres d'Entringer $e_{n,k}$ sont définis par la récurrence.

$$e_{n,n} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

et, pour $k = 1,\dots,n$,

$$e_{n+1,k+1} = e_{n+1,k} - e_{n,n+1-k}.$$

Ils sont reliés aux nombres d'Euler par la relation

$$e_n = e_{n+1,1} = \sum_{k=1}^{n} e_{n,k}. \tag{3.19}$$

Proposition 59. *Soient $n > 0$ et $0 < r < n$.*

$$\tilde{\mathcal{P}}_{n,r}(-1) = e_{n,r}. \tag{3.20}$$

Avant de présenter la preuve de cette proposition, on remarque qu'en posant $r = 1$ on retrouve le fait que $\mathcal{P}_n(-1) = e_{n-1}$. De plus, en utilisant la relation (3.19), on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 60. *Soit $n > 0$.*

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(-1) = e_n. \tag{3.21}$$

Tout le reste de cette section est consacrée à la preuve de la proposition 59, pour laquelle nous allons nous inspirer de la preuve de l'identité (3.5) due à Pansiot [123]. Nous allons procéder en trois étapes :

1. exhiber un sous-ensemble $\mathcal{B}_{n,0,r}$ de $\mathcal{A}_{n,0,r}$ de cardinal $e_{n,r}$, dont chaque arborescence a un nombre pair d'inversions,
2. partitionner $\mathcal{A}_{n,0,r}$ en sous-familles $C_1,\dots,C_l$ telles que pour $i = 1,\dots,l$, C_i contient au plus une arborescence de $\mathcal{B}_{n,0,r}$ (on aura alors $\tilde{\mathcal{P}}_{n,r}(-1) = \sum_{i=1}^{l} \mathcal{P}_{C_i}(-1)$),
3. montrer que pour $i = 1,\dots,l$, $\mathcal{P}_{C_i}(-1) = 1$ si C_i contient une arborescence de $\mathcal{B}_{n,0,r}$ et $\mathcal{P}_{C_i}(-1) = 0$ sinon, ce qui prouvera la proposition 59.

Une sous-famille $\mathcal{B}_{n,0,r}$ de $\mathcal{A}_{n,0,r}$ de cardinal $e_{n,r}$. Pour définir la famille d'arborescences $\mathcal{B}_{n,0,r}$, il est nécessaire d'introduire la notion d'arborescence paire, utilisée notamment par Pansiot [123], Viennot [162] ou Kuznetsov, Pak et Postnikov [107].

Définition 61. Une arborescence est *paire* si tout sommet différent de la racine a un nombre pair de fils. On note $\mathcal{B}_{n,0,r}$ la famille des arborescences A de $\mathcal{A}_{n,0,r}$ telles que, si $x_1,x_2,\dots,x_k$ sont les fils de r et $A_1,A_2,\dots,A_k$ les sous-arborescences de A de racines respectives $x_1,x_2,\dots,x_k$, les A_i sont des *arborescences décroissantes paires contenant chacune un nombre impair de sommets supérieurs à r.*

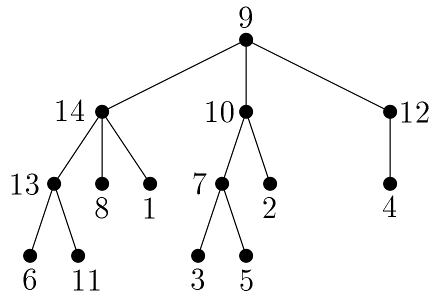


FIG. 3.2 – Une arborescence de $\mathcal{B}_{14,0,9}$.

Lemme 62. *Pour tout arborescence A de $\mathcal{B}_{n,0,r}$, $inv(T)$ est pair.*

Preuve. Soit $A \in \mathcal{B}_{n,0,r}$. Les A_i étant des arborescences décroissantes paires, chaque sommet x tel que $x \neq r$ et $x \neq x_i$, a un nombre pair de descendants, et est supérieur à tous ses descendants. L'arborescence possède donc un nombre pair d'inversions de la forme (x,y) avec $x \neq r$ et $x \neq x_i$. La parité de $inv(A)$ est donc celle du nombre d'inversions de la forme (r,y) ou (x_i,y), pour $i = 1,2,\ldots,k$. Les A_i étant décroissantes, le nombre d'inversions de la forme (x_i,y) est égal à $n-k-1$. De plus, le nombre d'inversions de la forme (r,y) est égal à

$$r - 1 = n - 1 - \sum_{i=1}^{k} |A_i|_{>r}.$$

Il s'en suit que la parité de $inv(A)$ est celle de

$$2n - 2 - k - \sum_{i=1}^{k} |A_i|_{>r} = 2n - 2 - \sum_{i=1}^{k} (|A_i|_{>r} + 1).$$

Il suffit alors de rappeler que par définition de l'ensemble $\mathcal{B}_{n,0,r}$, $|A_i|_{>r}$ est impair pour $i = 1,2,\ldots,k$, pour conclure la preuve de ce lemme. □

Soit $\overline{\mathcal{B}}_{n,0,r}$ la famille des arborescences A telles que, si $x_1,x_2,\ldots,x_k$ sont les fils de la racine r et $A_1,A_2,\ldots,A_k$ les sous-arborescences de A de racines respectives $x_1,x_2,\ldots,x_k$, les A_i sont des *arborescences croissantes paires contenant chacune un nombre impair de sommets supérieurs à r*. Il existe une bijection immédiate entre $\overline{\mathcal{B}}_{n,0,r}$ et $\mathcal{B}_{n,0,r}$ (elle consiste, pour chaque A_i, à échanger son plus grand sommet et son plus petit sommet, puis son second plus grand et son second plus petit, etc). La figure 3.3, page suivante, représente une arborescence de $\mathcal{B}_{n,0,r}$ et l'arborescence correspondante de $\overline{\mathcal{B}}_{n,0,r}$. On constate qu'une arborescence de $\overline{\mathcal{B}}_{n,0,r}$ n'appartient pas en général à $\mathcal{A}_{n,0,r}$.

Soit $\mathcal{C}_{n,r}$ la famille des arborescences croissantes paires sur $[n]$ telles que le père du sommet n (nécessairement une feuille) est le sommet r. Kuznetsov, Pak et Postnikov ont montré bijectivement le résultat suivant.

Théorème 63. [107, théorème 4] *Soient $n > 0$ et $0 < r < n$.*

$$|\mathcal{C}_{n+1,r}| = e_{n,r}.$$

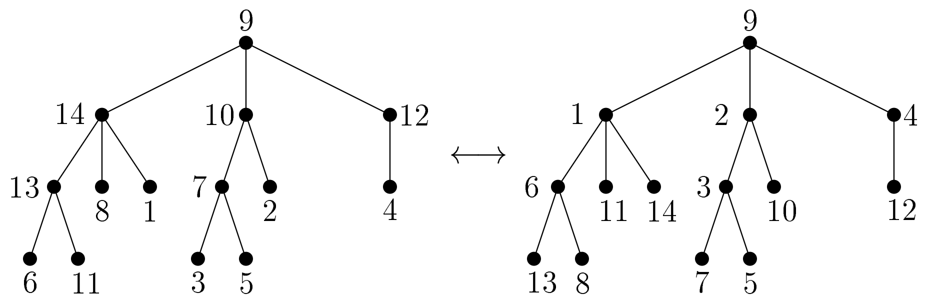


FIG. 3.3 – La correspondance entre $\overline{\mathcal{B}}_{n,0,r}$ et $\mathcal{B}_{n,0,r}$

Pour prouver que $\mathcal{B}_{n,0,r} = e_{n,r}$, il suffit donc d'établir une bijection entre $\mathcal{C}_{n+1,r}$ et $\overline{\mathcal{B}}_{n,0,r}$.

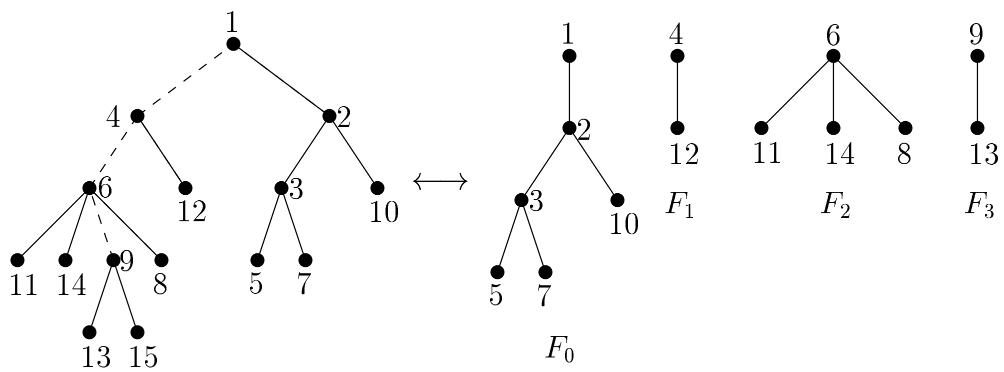
Lemme 64. *Il existe une bijection ϕ entre $\mathcal{C}_{n+1,r}$ et $\overline{\mathcal{B}}_{n,0,r}$.*

Preuve. Soit A une arborescence de $\mathcal{C}_{n+1,r}$. On distingue deux cas.
Cas 1. Dans un premier temps, on traite le cas où $r = 1$ (et donc la racine de A). Dans ce cas $\phi(A)$ est obtenue en supprimant le sommet $n+1$ de A. Du fait que A est une arborescence croissante et paire, on a bien $\phi(A) \in \overline{\mathcal{B}}_{n,0,r}$. On a donc dans ce cas une bijection entre les arborescences de $\mathcal{C}_{n+1,1}$ et les arborescences de $\overline{\mathcal{B}}_{n,0,1}$.
Cas 2. On suppose maintenant que $r \neq 1$. La bijection ϕ, qui se décompose alors en 4 étapes que nous illustrons au fur et à mesure par un exemple, est basée sur les notions de de *r-forêt paire* et de *r-forêt impaire* d'une arborescence.

Soient B une arborescence quelconque, $x_1,\dots,x_k$ les fils de la racine de B et $B_1,\dots,B_k$ les sous-arborescences de B de racines respectives $x_1,\dots,x_k$: pour un r donné, la r-forêt paire (resp. impaire) de B est le sous-ensemble des B_i ayant un nombre pair (resp. impair) de sommets supérieurs à r.
Étape 1. On supprime dans A la feuille $n+1$, puis toutes les arêtes du chemin allant de la racine 1 à r, ce qui donne une forêt ordonnée $F = \{F_0,F_1,\dots, F_k\}$ de $k+1$ arborescences de racines respectives $x_0(=1) < x_1 < \cdots < x_k(=r)$. La construction inverse, produisant A à partir de F, est immédiate du fait de l'ordre sur les racines des F_i.

Dans notre exemple, on considère une arborescence de $\mathcal{C}_{15,9}$. La figure suivante illustre cette décomposition de A en F (les arêtes en pointillées représentent le chemin de la racine 1 au sommet r). La forêt F vérifie alors la propriété suivante.

(a) *Pour $i = 0,1,\dots,k$, F_i est une arborescence croissante paire. De plus, si $i > 0$, la racine x_i de F_i a un nombre impair de fils.*



Étape 2. On partitionne $F = \{F_0,F_1,\ldots, F_k\}$ en trois sous-ensembles : l'arborescence F_k, l'ensemble $F' = \{F_0,F'_1,\ldots,F'_l\}$ et l'ensemble $F'' = \{F''_1,\ldots,F''_{k-l-1}\}$ où les F'_i (resp. F''_j) sont les arborescences de F autres que F_0 (resp. que F_k) ayant un nombre pair (resp. impair) de sommets supérieurs à r. On peut avoir F'' vide (notamment lorsque $k = 2$). Dans notre exemple, on a $F' = \{F_0,F_2\}$ et $F'' = \{F_1\}$. La construction inverse, produisant F à partir de F_k, F' et F'' est immédiate, et F' vérifie les propriétés suivantes.

(b) *Pour tout $i > 0$, la r-forêt impaire (resp. paire) de F'_i contient un nombre pair (resp. impair) d'arborescences.*

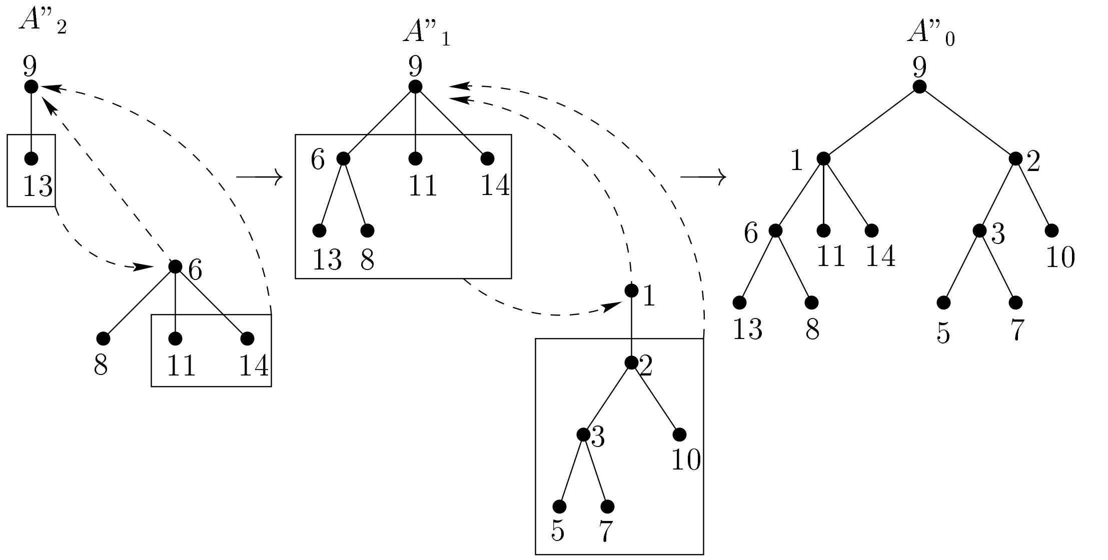
En effet, comme F'_i contient un nombre pair de sommets supérieurs à r, la r-forêt impaire de F'_i ne peut contenir qu'un nombre pair d'arborescences. Et comme la racine de F'_i a un nombre impair de fils (propriété (a)), la r-forêt paire de F'_i contient un nombre impair d'arborescences.

(c) *Pour tout i, la r-forêt impaire (resp. paire) de F''_i contient un nombre impair (resp. pair) d'arborescences.*

On prouve (c) de la même manière que (b).

Étape 3. La troisième étape consiste à construire de manière incrémentale une arborescence A'' à partir de F_k en “insérant” les arborescences de F' de la manière suivante. On commence par poser $A''_{l+1} = F_k$, puis pour i allant de l à 0, on échange les r-forêts impaires de F'_i et A''_{i+1} (les arborescences de la r-forêt impaire de F'_i sont insérées sous la racine de A''_{i+1} pendant que, simultanément, les arborescences de la r-forêt impaire de A''_{i+1} sont insérées sous la racine x'_i de F'_i) et enfin on insère l'arborescence F'_i ainsi modifiée sous la racine de A''_{i+1} (x'_i devient un fils de cette racine) pour obtenir A''_i. Finalement, on pose $A'' = A''_0$.

Sur notre exemple, on effectue donc les opérations décrites par la figure suivante (on entoure les r-forêts impaires qu'on va échanger). On rappelle que $F' = \{F_0,F_2\}$ et $F_k = F_3$.



On vérifie alors les propriétés suivantes.

(d) *Pour $i = 0,\ldots,l+1$, la racine de A''_i est r.*

En effet, la racine de $F_k = A''_{l+1}$ est r, par définition de F_k, et aucune des opérations effectuées lors du passage de A''_{i+1} à A''_i ne modifie cette racine.

(e) *Pour $i = 1, \ldots, l+1$, la racine r de A''_i a a un nombre impair de fils et pour $i = 0, \ldots, l+1$, la r-forêt paire de A''_i est vide.*

Pour le cas $i = l+1$, cela découle directement de la définition de $F_k = A''_{l+1}$, qui est une arborescence croissante paire de racine r, et de la propriété (a). Pour le cas général, cela découle de la transformation de A''_{i+1} en A''_i :

- on remplace la r-forêt impaire de F'_i, qui contient un nombre pair d'arborescences, sauf éventuellement si $i = 0$ (propriété (b)), par celle de A''_{i+1}, qui en contient un nombre impair (par induction), ce qui entraîne que parmi ses descendants, x'_i a maintenant un nombre impair de sommets supérieurs à r,
- on remplace la r-forêt impaire de r (par induction, cela revient à enlever tous les fils de r) par celle de F'_i (qui contient un nombre pair d'arborescences) et on greffe ensuite une arborescence ayant un nombre impair de sommets supérieurs à r comme on vient de le voir.

(f) *Pour $i = 0, \ldots, l$, le plus petit fils de la racine r de A''_i est x'_i (la racine de F'_i).*

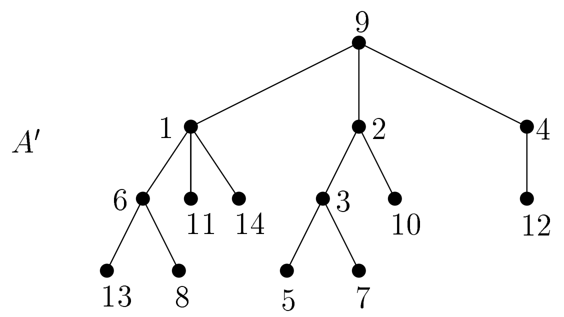
Les fils de r dans A''_i sont les racines de la r-forêt impaire de F'_i (c'est-à-dire des sommets supérieurs à x'_i car F'_i est une arborescence croissante) et x'_i lui-même.

(g) *Pour $i = 0, \ldots, l+1$, les sous-arborescences de A''_i ayant pour racines les fils de r sont croissantes paires.*

Cette propriété découle directement de la construction de A''_i et de la propriété (a) qui assure que les F'_i sont des arborescences croissantes paires.

La propriété (f) permet de définir la construction inverse, donnant F_k et F' à partir d'une arborescence A'' de r-forêt paire vide : tant que le plus petit fils x de la racine r de A'' vérifie $x < r$ (on note A_x la sous-arborescence de A'' de racine x), on supprime l'arête reliant r et x, on échange simultanément les r-forêts impaires de A'' (privé de A_x) et de A_x, puis on ajoute l'arborescence A_x ainsi modifié à F' ; la dernière arborescence A'' restante pour laquelle r est inférieur à tous ses fils est F_k.

Étape 4. Finalement, la dernière étape consiste à insérer sous la racine r de A'' toutes les arborescences de F''. On déduit des propriétés (c), (d), (e) et (g) que l'arborescence A' ainsi obtenue appartient bien à $\overline{\mathcal{B}}_{n,0,r}$.



La construction inverse, donnant F'' et A'' à partir de A', est basée sur les propriétés (c) et (e) et sur le fait que F_0 est de racine 1 et n'appartient pas à F''. Elle consiste à déterminer toutes les sous-arborescences de A' de racine autre que 1 ayant une r-forêt paire contenant un nombre pair d'arborescences. Les arborescences ainsi déterminées de A' forment F''. □

Nous avons donc achevé la première étape de la preuve de la proposition 59, en exhibant un sous-ensemble de $\mathcal{A}_{n,0,r}$ de cardinal $e_{n,r}$ ne contenant que des arborescences ayant un nombre pair d'inversions.

Partition de la famille $\mathcal{A}_{n,0,r}$. Cette deuxième étape a pour objectif de partitionner $\mathcal{A}_{n,0,r}$ en sous-ensembles $C_1, \ldots ,C_l$ contenant chacun au plus une arborescence de $\mathcal{B}_{n,0,r}$. Nous allons définir cette partition en termes de classes d'équivalence d'une relation basée sur la notion de *sommets échangeables*, notion introduite par Pansiot [123].

Définition 65. Soit A une arborescence, x et y deux sommets de A tels que y est un descendant de x. On dit que x et y sont *échangeables* si il n'existe pas de sommet z descendant de x vérifiant $x < z < y$ ou $y < z < x$.

Par exemple, dans l'arborescence A_1 de la figure 3.4 ci-dessous, les sommets 5 et 6 sont échangeables, alors que les sommets 5 et 8 ne le sont pas, ni les sommets 1 et 3. Il est clair qu'échanger deux sommets échangeables inverse la parité du nombre d'inversions.

Définition 66. Soient A et A' deux arborescences de $\mathcal{A}_{n,0,r}$. On dit que A et A' sont *équivalentes pour l'échange racine-contraint* si il existe k arborescences $A_1, \ldots ,A_k$ de $\mathcal{A}_{n,0,r}$ telles que $A_1 = A$, $A_k = A'$ et, pour $0 < i < k$, A_i et A_{i+1} diffèrent par l'échange de deux sommets échangeables (racine-contraint signifie ici que la racine reste inchangée et toujours inférieure à ses fils).

Notation. Pour une arborescence A de $\mathcal{A}_{n,0,r}$, on note $C_r(A)$ la clôture transitive de A pour la relation d'équivalence définie par l'échange racine-contraint.

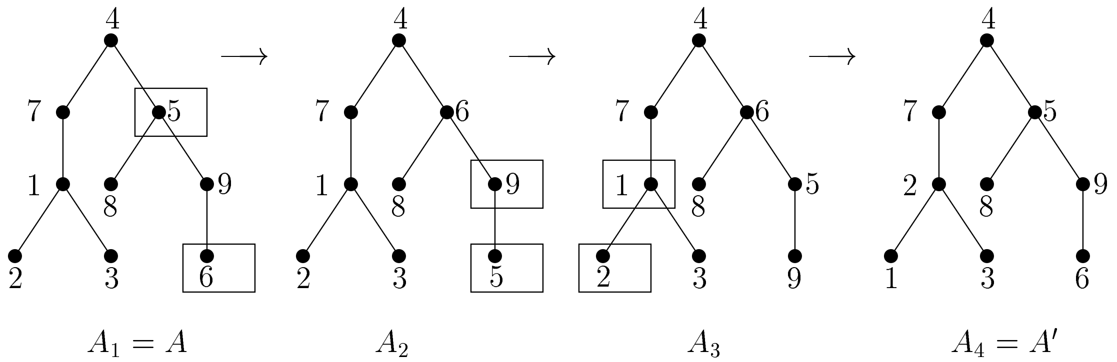


FIG. 3.4 – Illustration de l'équivalence pour l'échange racine-contraint

La relation d'équivalence ainsi définie à partir de la notion d'échange racine-contraint induit donc une partition de $\mathcal{A}_{n,0,r}$ en classes d'équivalence, les classes $C_r(A)$ pour toutes les arborescences A de $\mathcal{A}_{n,0,r}$. Pour vérifier que toute classe contient au plus une arborescence de $\mathcal{B}_{n,0,r}$, on introduit une deuxième relation d'équivalence.

Définition 67. Soit $k \in [n]$. On dit que deux arborescences A et A' sont *équivalentes pour l'échange k-contraint* si il existe m arborescences $A_1, \ldots ,A_m$ telles que $A_1 = A$, $A_m = A'$, pour tout i la racine de A_i est supérieure ou égale à k et, pour $0 < i < m$, on passe de A_i à A_{i+1} par l'échange de deux sommets échangeables.

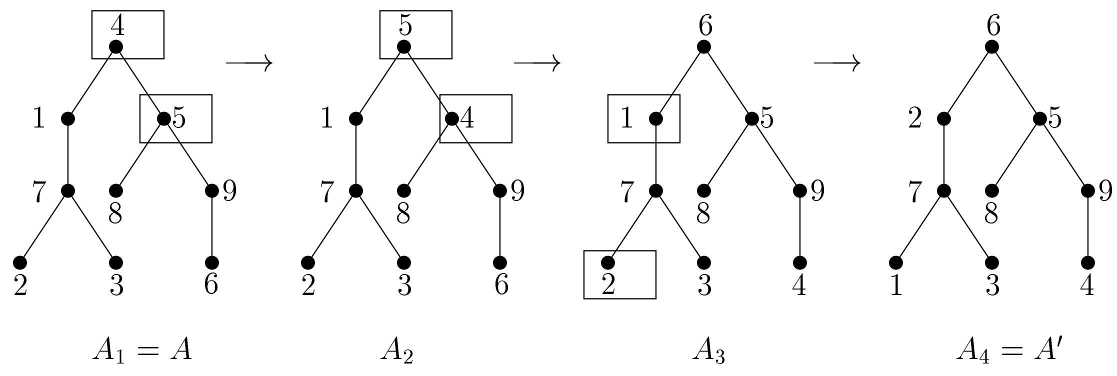


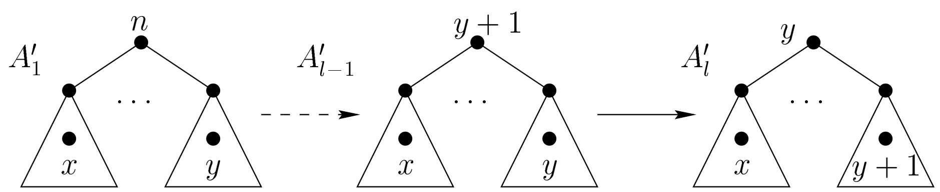
FIG. 3.5 – Illustration de l'équivalence pour l'échange 4-contraint

Notation. Pour une arborescence A donnée, on note $C^k(A)$ la clôture transitive de A pour la relation d'équivalence définie par l'échange k-contraint.

Lemme 68. *Soient k et n deux entiers tels que $k \in [n]$, et A une arborescence sur $[n]$ de racine supérieure ou égale à k. Alors $C^k(A)$ contient* une et une seule *arborescence décroissante.*

Preuve. Il est clair que la classe $C^k(A)$ contient au moins une arborescence décroissante. En effet, par une série d'échanges k-contraint, on peut faire "remonter" n à la racine : échange de la racine x avec $x + 1$, puis $x + 1$ avec $x + 2$, etc et on réitère ce procédé pour chacune des sous-arborescences en "remontant" le plus grand sommet, ... jusqu'à obtenir une arborescence décroissante.

Il reste alors à montrer qu'il n'y en a qu'une seule. Pour cela prenons A' et A'' deux arborescences décroissantes (de racine n donc) équivalentes pour l'échange k-contraint. Supposons qu'il existe deux sommets x, $y > k$ tels que le plus proche ancêtre commun de x et y est la racine n dans A', et un sommet différent de n dans A''. Il existe donc $A' = A'_1, \ldots, A'_m = A''$ telles que A'_i et A'_{i+1} diffèrent par un échange k-contraint. Du fait que y doit être "transporté" dans la sous-arborescence de la racine contenant x, on en déduit qu'il existe $l < m$ tel que la racine de A'_l est y et $y + 1$ n'est pas dans la sous-arborescence contenant x. En effet, y devant passer par la racine, n doit la quitter et ne peut être échangé qu'avec $n - 1$, puis $n - 1$ seulement avec $n - 2$, ..., et enfin $y + 1$ avec y.



Comme n est la racine de A'_m, un raisonnement analogue conduit à affirmer qu'il faudra effectuer de nouveau l'échange $(y,y{+}1)$ et donc extraire y de la sous-arborescence contenant x. Donc, si A' et A'' sont deux arborescences décroissantes appartenant à $C^k(A)$, le plus proche ancêtre commun du couple de sommets (x,y) dans A' est n si et seulement si le plus proche ancêtre commun du couple de sommets (x,y) dans A'' est n. En répétant récursivement ce raisonnement sur les sous-arborescences de A' et A'' ayant pour racines les fils de n, on montre que tout couple de sommets (x,y) a même plus proche ancêtre commun dans A' et A'', et donc que $A' = A''$. □

Notation. Pour une arborescence A, de racine supérieure ou égale à k, on note $Dec^k(T)$ l'unique arborescence décroissante de $C^k(T)$.

Lemme 69. *Soit $A \in \mathcal{A}_{n,0,r}$. $C_r(A)$ contient* une et une seule *arborescence A' telle que sa racine r est inférieure à ses fils $x_1,\dots,x_k$ et ses sous-arborescences $A'_1,\dots,A'_k$ de racines respectives $x_1,\dots,x_k$ sont décroissantes.*

Preuve. Comme on effectue seulement des échanges racine-contraints, si deux arborescences A' et A'' appartiennent à $C_r(A)$, le plus proche ancêtre commun de (x,y) dans A' est r si et seulement si le plus proche ancêtre commun de (x,y) dans A'' est r. En appliquant le lemme 68 aux sous-arborescences de A' et A'' ayant pour racines les fils de r, on prouve bien qu'au plus une des deux arborescences A' et A'' peut vérifier les conditions du lemme. Le fait qu'il en existe une s'obtient par un raisonnement identique à celui employé dans la preuve précédente. □

Notation. Pour une arborescence $A \in \mathcal{A}_{n,0,r}$, on note $Dec_r(A)$ l'unique arborescence de $C_r(A)$ vérifiant les propriétés du lemme 69.

Nous avons donc complété la deuxième étape de la preuve de la proposition 59, en décrivant une partition de $\mathcal{A}_{n,0,r}$ en ensembles tels que chacun d'entre eux contient au plus une arborescence de $\mathcal{B}_{n,0,r}$ (chacun contient une seule arborescence dont la racine est inférieure à ses fils et les sous-arborescences sont décroissantes).

Évaluation en -1 du polynôme énumérateur des inversions des classes $C_r(A)$. Dans cette dernière partie de la preuve, pour toute arborescence A on note $\mathcal{P}_{C_r(A)}(q)$ (resp. $\mathcal{P}_{C^k(A)}(q)$) le polynôme énumérateur des inversions de l'ensemble d'arborescences $C_r(A)$ (resp. $C^k(A)$). Comme précédemment, on s'intéresse d'abord aux classes d'équivalence pour l'échange k-contraint.

Lemme 70. *Soit A une arborescence sur $[n]$ de racine n et $B = Dec^n(A)$. $\mathcal{P}_{C^n(A)}(-1) = 0$ si B est une arborescence décroissante paire et $\mathcal{P}_{C^n(A)}(-1) = (-1)^{inv(B)}$ sinon.*

Preuve. Dans [123], Pansiot établit une involution ψ sur les arborescences non décroissantes paires et de racine n telle que A et $\psi(A)$ diffèrent par un échange n-contraint ($inv(A)$ et $inv(\psi(A))$ n'ont donc pas même parité). Pour toute arborescence de racine n, la classe $C^n(A)$ contenant au plus une arborescence décroissante (lemme 68), le lemme est une conséquence directe du résultat de Pansiot. □

Lemme 71. *Soient $k \in [n]$, A une arborescence sur $[n]$ de racine k et $B = Dec^k(A)$. $\mathcal{P}_{C^k(A)}(-1) = \mathcal{P}_{C^n(A)}(-1) \times (|B|_{\geq k} \mod 2)$.*

Preuve. On note D_i la classe des arborescences de $C^k(A)$ de racine i (pour $i = k,\dots,n$). On a alors $D_n = C^n(B)$ et on construit D_i à partir de D_{i+1} en échangeant les sommets i et $i+1$ dans toutes les arborescences de D_{i+1}. Par construction des D_i, on vérifie immédiatement que $\mathcal{P}_{D_i}(-1) = -\mathcal{P}_{D_{i+1}}(-1)$. Le lemme découle alors du fait que $\mathcal{P}_{C^k(A)}(-1) = \sum_{i=k}^{n} \mathcal{P}_{D_i}(-1)$. □

Lemme 72. *Soit $A \in \mathcal{A}_{n,0,r}$. $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 1$ si $Dec_r(A) \in \mathcal{B}_{n,0,r}$ et $P_{C_r(A)}(-1) = 0$ sinon.*

Preuve. Soient $x_1, \dots, x_k$ les fils de r dans $Dec_r(A)$ et $A'_1, \dots, A'_k$ les sous-arborescences de $Dec_r(A)$ de racines respectives $x_1, \dots, x_k$. On note D_i (resp. D'_i) l'ensemble d'arborescences $C^r(A'_i)$ (resp. $C^{x_i}(A'_i)$). Toute arborescence A'' de $C_r(A)$ est constituée d'une racine r et de k arborescences $A''_1, \dots, A''_k$ appartenant respectivement à $D_1, \dots, D_k$. On a donc

$$(-1)^{inv(A'')} = (-1)^{r-1} \times \prod_{i=1}^{k} (-1)^{inv(A''_i)}.$$

On en déduit que

$$\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = (-1)^{r-1} \times \prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_{C^r(A'_i)}(-1)$$

ou de manière équivalente (lemme 71)

$$\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = (-1)^{r-1} \times \left(\prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_{C^{x_i}(A'_i)}(-1) \times (|A'_i|_{\geq r} \mod 2) \right),$$

ce qui est aussi équivalent à

$$\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = (-1)^{inv(Dec^r(A))} \times \left(\prod_{i=1}^{k} |\mathcal{P}_{C^{x_i}(A'_i)}(-1)| \times (|A'_i|_{\geq r} \mod 2) \right), \tag{3.22}$$

On a donc $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 0$ si et seulement si il existe $i \in [k]$ tel que $\mathcal{P}_{C^{x_i}(A'_i)}(-1) = 0$ ou $(|A'_i|_{\geq r} \mod 2) = 0$, ce qui est équivalent à dire que $Dec_r(A) \notin \mathcal{B}_{n,0,r}$. Donc si $Dec_r(A) \in \mathcal{B}_{n,0,r}$ on a $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 1$ ou $P_{C_r(A)}(-1) = -1$, et si $Dec_r(A) \notin \mathcal{B}_{n,0,r}$ on a $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 0$. Or si $Dec_r(A) \in \mathcal{B}_{n,0,r}$, les A'_i sont des arborescences décroissantes paires. Donc, d'après le lemme 70, qui permet d'affirmer que pour tout i, $|\mathcal{P}_{C^{x_i}(A'_i)}(-1)| = 1$, et le lemme 62, qui permet d'affirmer que $inv(Dec_r(A))$ est pair, on a bien $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 1$. □

Ceci conclut la preuve de la proposition 59, qui est une conséquence du théorème 63, des lemmes 64, 69 et 72, et par là-même ce chapitre consacré au polynôme énumérateur des inversions des arborescences de Cayley dont la racine est inférieure à ses fils.

Chapitre 4

Arborescences alternantes

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'énumération d'arborescences alternantes, définies de la manière suivante.

Définition 73. Une arborescence A est dite *alternante* si pour tout chemin x_1,x_2, x_3, x_4, $\ldots$ dans A, on a $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > \cdots$ ou bien $x_1 > x_2 < x_3 > x_4 < \cdots$.

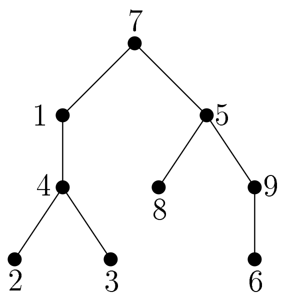


FIG. 4.1 – Une arborescence alternante

Les arborescences de Cayley alternantes ont été introduites par Postnikov [125, 124], qui montre que le nombre de telles arborescences sur $[n-1]$ et de racine 1 est égal au nombre de régions de l'arrangement d'hyperplans de R^n défini par Linial. Postnikov prouve notamment, à l'aide de l'inversion de Lagrange, une formule donnant le nombre de ces arborescences, et pose la question d'une preuve bijective de ce résultat.

Dans un premier temps nous répondons à cette question. Dans la section suivante, nous nous intéressons aux arborescences ordonnées alternantes et nous relions ces objets aux arborescences de la famille $\mathcal{A}_{n,0}$.

4.1 Arborescences de Cayley alternantes

4.1.1 Les résultats de Postnikov

On note $\mathcal{F}_n$ la famille des arborescences de Cayley alternantes sur $[n]$ et $f_n = |\mathcal{F}_n|$.

Théorème 74. [125, 124] *Le nombre f_n d'arborescences de Cayley alternantes sur $[n]$ est*

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{n-1}. \tag{4.1}$$

Pour prouver ce résultat, Postnikov considère les arborescences de Cayley alternantes de racine étiquetée 1 (nous notons cette famille $\tilde{\mathcal{F}}_n$) et la série génératrice exponentielle (décalée) de $\tilde{\mathcal{F}}_n$

$$\tilde{F}(x)=\sum_{k\geq 0}\tilde{f}_{k+1}\frac{x^k}{k!}.$$

Il montre que cette série vérifie l'équation fonctionnelle

$$\tilde{F}(x)=e^{\frac{x}{2}(\tilde{F}(x)+1)}, \tag{4.2}$$

et en déduit (4.1) à l'aide de la formule d'inversion de Lagrange.

D'autre part Postnikov relie ces arborescences et les *arborescences LBS* (LBS pour *Local Binary Search*), introduites par Gessel.

Définition 75. Une *arborescence LBS* est une arborescence ordonnée binaire (chaque noeud a un ou deux fils, un *fils droit* et/ou un *fils gauche*) telle que pour chaque noeud x, son fils droit, s'il existe, a une étiquette supérieure à x et son fils gauche, s'il existe, a une étiquette inférieure à x.

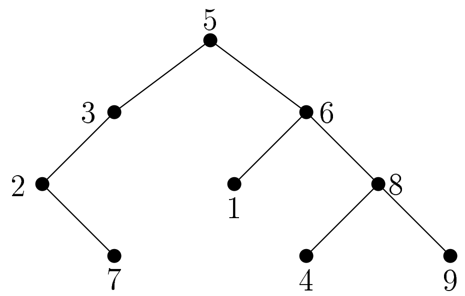


Fig. 4.2 – Une arborescence LBS à 9 sommets.

Remarque 76. Dans le cas des arborescences binaires de recherche, la contrainte sur l'ordre des sommets est globale : un sommet est supérieur (resp. inférieur) à tous les sommets de sa sous-arborescence gauche (resp. droite). Ici cette contrainte n'est que locale.

On note $\mathcal{LBS}_n$ la famille des arborescences LBS sur $[n]$ pour lesquelles la racine n'a qu'un seul fils. Dans [125], Postnikov établit le résultat suivant.

Proposition 77. *Il existe une bijection ϕ entre $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{LBS}_n$.*

La bijection ϕ procède comme suit. Soit $A \in \mathcal{F}_n$. Pour chaque sommet x de A, soient $x_1 < \cdots < x_k$ les fils de x. Si $x < x_1$, alors on place $x_1, x_2, \ldots, x_k$ consécutivement sur une branche droite issue de x. Sinon, $x > x_k$, et on place $x_1, x_2, \ldots, x_k$ consécutivement sur une branche gauche issue de x. La construction inverse est claire.

Dans le paragraphe suivant nous décrivons une preuve bijective du théorème 74, répondant ainsi à la question posée par Postnikov.

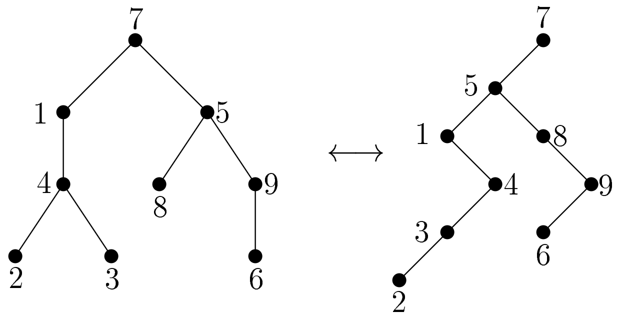


FIG. 4.3 – Illustration de la bijection ϕ

4.1.2 Une preuve bijective du théorème 74

Soit $\mathcal{LBS}_n^c$ la famille des arborescences LBS bicoloriées sur $[n]$ telles que la racine a un seul fils : tout sommet autre que la racine est soit noir, soit blanc, la racine étant toujours noire. Une conséquence directe de la proposition 77 est :

$$|\mathcal{LBS}_n^c| = 2^{n-1} f_n. \tag{4.3}$$

Soit $\mathcal{A}_n^c$ la famille des arborescences de Cayley sur $[n]$ dont les feuilles sont bicoloriées (blanches ou noires), tous les noeuds étant noirs. Pour une arborescence A de $\mathcal{A}_n^c$, on note $n(A)$ son nombre de noeuds, $f_N(A)$ (resp. $f_B(A)$) son nombre de feuilles noires (resp. blanches). En utilisant le codage de Prüfer, une arborescence A de $\mathcal{A}_n^c$ vérifiant $n(A) + f_N(A) = k$ $(1 \leq k \leq n)$ est codée par un couple (S,m) où $S \subseteq [n]$ est un sous-ensemble de $[n]$ de taille k (les noeuds et les feuilles noirs) et m un mot de longueur $n-1$ sur l'alphabet S (les feuilles noires sont les lettres de S n'apparaissant pas dans le mot m, les feuilles blanches étant les lettres de $[n]/S$). On en déduit que

$$|\mathcal{A}_n^c| = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-1}. \tag{4.4}$$

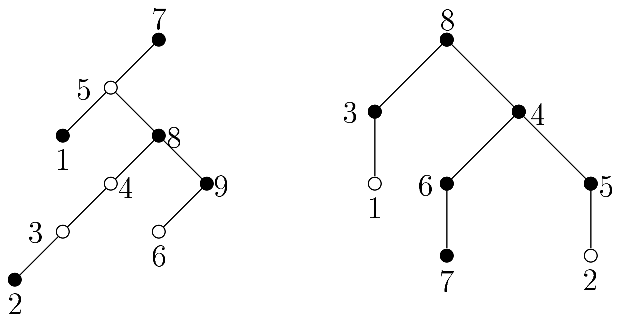


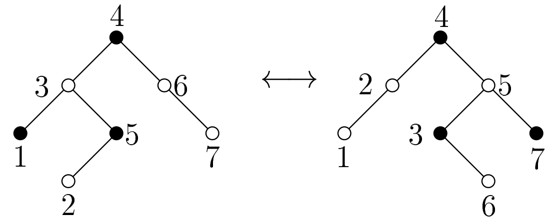
FIG. 4.4 – Une arborescence de $\mathcal{LBS}_9^c$ et une arborescence de $\mathcal{A}_8^c$

Proposition 78. *Il existe une bijection ψ entre $\mathcal{LBS}_n^c$ et $\mathcal{A}_n^c$.*

Preuve. Nous commençons par introduire une construction intermédiaire, à savoir une involution θ sur $\mathcal{LBS}_n^c$. Soit A une arborescence de $\mathcal{LBS}^c$ sur l'ensemble d'étiquettes $\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$, avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$. L'arborescence LBS bicoloriée $\theta(A)$ est obtenue en effectuant les opérations suivantes :

- pour $1 \leq i \leq k$, échanger les étiquettes x_i et x_{k-i+1}, les couleurs restant attachées aux sommets ;
- pour chaque noeud, échanger les sous-arborescences droite et gauche (l'ordre sur les étiquettes ayant été inversé, il est nécessaire de procéder à cet échange gauche-droite pour obtenir une arborescence LBS).

La figure suivante illustre cette involution.



Soit $A \in \mathcal{A}_n^c$. On transforme récursivement A de manière à obtenir une arborescence de $\mathcal{LBS}_n^c$ de la façon suivante.

Cas 1. Si A est réduite à un sommet, alors $\psi(A) = A$, quelle que soit la couleur de ce sommet.

Cas 2. Si A a deux sommets, une racine et une feuille, on distingue deux cas :

- si la racine x de A est inférieure à son fils y, alors $\psi(A)$ est l'arborescence binaire de racine x ayant un fils droit y (la couleur de y restant inchangée et x restant noir),
- si la racine x de A est supérieure à son fils y, alors $\psi(A)$ est l'arborescence binaire de racine x ayant un fils gauche y (la couleur de y restant inchangée et x demeurant noir).

Propriété 79. Dans le cas où A a au plus deux sommets, la racine de $\psi(A)$ a au plus un fils et a la même étiquette que la racine de A. Si A a deux sommets, la racine de $\psi(A)$ est noire.

Cas 3. Supposons que A ait plus de deux sommets. Soient r sa racine, $x_1,\dots,x_k$ les fils de r et $A_1,\dots,A_k$ les sous-arborescences de racines respectives $x_1,\dots,x_k$. On procède récursivement de la manière suivante. Pour chaque A_i, soit $B_i = \psi(A_i)$. Par hypothèse d'induction (propriété 79), la racine de B_i est x_i, cette racine ayant au plus un fils. On transforme alors les B_i en B_i' en utilisant les règles suivantes :

- si B_i a un seul sommet x_i, alors $B_i' = B_i$;
- si x_i a un fils droit (qui, par hypothèse, est son seul fils), alors B_i' est obtenue à partir de B_i en coloriant la racine, étiquetée x_i, en noir ;
- sinon x_i a seulement un fils gauche : on pose $B_i' = \theta(B_i)$ et on colorie sa racine (qui peut alors avoir une étiquette différente de x_i) en noir.

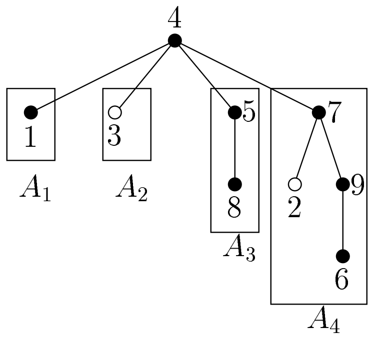
On a alors un ensemble de k arborescences LBS telles que chaque racine a un seul fils, qui est un fils droit, et chaque sommet est colorié en noir ou en blanc. On note $y_1,y_2,\dots,y_k$ leurs racines respectives, avec $y_1 < y_2 < \cdots < y_k$. On conclut alors la construction de $\psi(T)$ de la manière suivante, qui s'inspire de la bijection ϕ de la proposition 77 :

- si $y_k < r$, alors y_k devient fils gauche de r, y_{k-1} fils gauche de y_k, etc ;

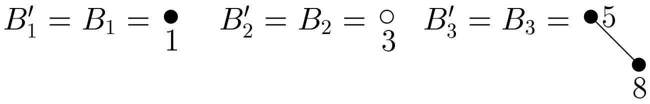
– si $y_k > r$, alors y_k devient fils droit de r, y_{k-1} fils gauche de y_k, y_{k-2} fils gauche de y_{k-1}, etc.

On vérifie immédiatement l'invariant (propriété 79) selon lequel la racine de A, de couleur noire, est aussi la racine de $\psi(A)$ et que cette dernière a un seul fils. □

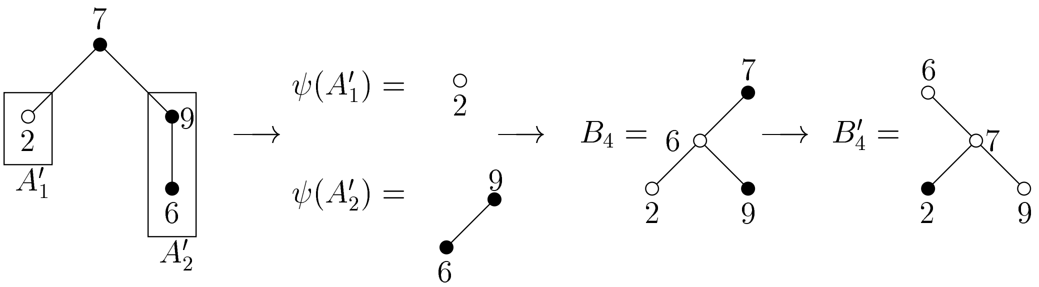
Nous illustrons maintenant cette construction par un exemple détaillé. Soit A l'arborescence de $\mathcal{A}_9^c$ suivante.



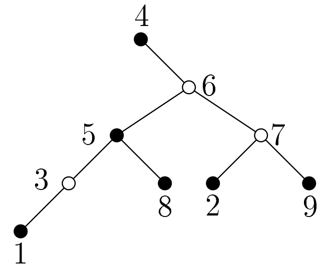
On a alors, pour A_1, A_2 et A_3,



et pour A_4 :



Et finalement, $\psi(A)$ est l'arborescence binaire suivante appartenant à $\mathcal{LBS}_9^c$.



4.1.3 Deux résultats supplémentaires

Pour conclure cette section, nous donnons deux résultats d'énumération sur les arborescences que nous venons de considérer.

Corollaire 80. *Le nombre $f_{n,p}$ d'arborescences LBS sur $[n]$ telles que la racine a un seul fils x et la* branche gauche *issue de x (le chemin débutant en x et n'empruntant que des* *arêtes gauches) comporte p sommets est*

$$\frac{n}{2^{n-1}}\binom{n-2}{p-1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}k^{n-1-p}.$$

Preuve. On déduit immédiatement de la définition de ψ que $2^{n-1}f_{n,k}$ est le nombre d'arborescences de $\mathcal{A}_n^c$ telles que la racine a exactement k fils. Le codage de Prüfer de telles arborescences de racine $r \in [n]$ est un mot de longueur $n-1$, sur un alphabet $S \subseteq [n]$ (de taille k et comportant la lettre r), tel que la lettre r apparaît exactement p fois dont une fois en dernière position. Le résultat en découle directement. □

Corollaire 81. *Le nombre d'arborescences de Cayley sur* $[n]$ *telles que chaque noeud a au moins un fils qui lui est supérieur (en d'autres termes, pour tout noeud* x*, il existe un chemin croissant allant de* x *à une feuille) est*

$$\frac{f_n}{2} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{n-1}.$$

Preuve. On déduit de la bijection ψ que ces arborescences sont en correspondance avec les arborescences de $\mathcal{LBS}_n^c$ telles que le fils de la racine est un fils droit et que tout sommet est colorié en noir. Le résultat provient alors de la proposition 77. On reconnaît ici la correspondance classique entre arborescences binaires et arborescences. □

4.2 Arborescences ordonnées alternantes

Dans cette section, nous nous intéressons à l'énumération des arborescences ordonnées alternantes. On note $\mathcal{K}_n$ la famille des arborescences ordonnées alternantes sur $[n]$ et k_n leur nombre. Nous présentons deux preuves, l'une formelle et l'autre bijective, du résultat suivant.

Théorème 82. *Le nombre d'arborescences ordonnées alternantes sur* $[n]$ *est*

$$2(n-1)^{n-1}.$$

4.2.1 Une preuve formelle

Pour prouver ce résultat nous nous intéressons à la famille $\mathcal{K}_{n,0}$ des arborescences ordonnées alternantes sur $[n]$ telles que la racine est inférieure à ses fils (on note $k_{n,0}$ le nombres de telles arborescences) et nous montrons que $k_{n,0} = (n-1)^{n-1}$. Soit $K_0(x)$ la série génératrice de ces arborescences :

$$K_0(x) = \sum_{n\geq 1} k_{n,0}\frac{x^n}{n!}.$$

Lemme 83. *La série génératrice* $K_0(x)$ *satisfait l'équation fonctionnelle*

$$K_0(x) - 1 = -e^{\frac{x}{K_0(x)-1}}.$$

Preuve. Soient $\mathcal{P}_n$ la famille des arborescences planes (voir la section 2.4 pour une définition des arborescences planes) alternantes sur $[n]$ (on pose $p_n = |\mathcal{P}_n|$) et $\mathcal{L}_n$ la famille des arbres ordonnés (graphes - dessinés au sens des cartes - connexes sans cycles *non enracinés*) alternants sur $[n]$ (on pose $l_n = |\mathcal{L}_n|$) [1]. On note $L(x)$ et $P(x)$ les séries génératrices

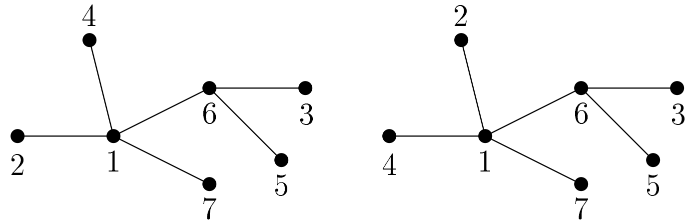


FIG. 4.5 – Deux arbres ordonnés alternants différents

exponentielles respectives des arbres ordonnés alternants $\mathcal{L}$ et des arborescences planes alternantes $\mathcal{P}$. On rappelle de plus que $\mathcal{C}$ désigne la famille des listes circulairement ordonnées.

En remarquant qu'une arborescence de $\mathcal{L}_n$ peut se décomposer en une liste circulairement ordonnée d'arborescences de $\mathcal{K}_{n-1,0}$ reliées au sommet n et que la série formelle

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x} = \sum_{n \geq 0} l_{n+1} \frac{x^n}{n!}$$

est en fait la série génératrice exponentielle des arbres ordonnés alternants dans lesquels le sommet maximal n'est pas "compté" par la variable formelle x, on en déduit que

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x} = \ln\left(\frac{1}{1 - K_0(x)}\right).$$

Comme on obtient une arborescence de $\mathcal{P}_n$ en pointant un sommet d'un arbre de $\mathcal{L}_n$, on a alors

$$P(x) = x\frac{\partial L(x)}{\partial x} = x \ln\left(\frac{1}{1 - K_0(x)}\right). \tag{4.5}$$

D'autre part, une arborescence plane alternante de $\mathcal{P}_n$ est équivalente à un arbre de $\mathcal{L}_n$ si sa racine est n, et à une arborescence de $\mathcal{K}_{n,0}$ si sa racine est inférieure à n (il suffit d'ordonner linéairement les fils de la racine en considérant comme fils le plus à gauche le seul fils de la racine situé sur le chemin allant de la racine au sommet n). En remarquant que dans le cadre de cette correspondance, si $n = 1$, on considère deux fois la seule arborescence de $\mathcal{P}_1$ (en tant qu'arbre de $\mathcal{L}_1$ et arborescence de $\mathcal{K}_{1,0}$), on obtient l'identité suivante :

$$P(x) = K_0(x) + L(x) - x. \tag{4.6}$$

En dérivant (4.5) et (4.6), on obtient alors

$$1 + \frac{x}{1 - K_0(x)} \frac{\partial K_0(x)}{\partial x} = \frac{\partial K_0(x)}{\partial x}.$$

1. La preuve que nous donnons ici, différente de la preuve présentée dans [37], nous a été indiquée par Volker Strehl.

En multipliant les deux membres de l'identité précédente par $1/(1-K_0(x))$ et en intégrant, on obtient alors

$$\frac{x}{1-K_0(x)} = \ln\left(\frac{x}{1-K_0(x)}\right),$$

le lemme en découlant immédiatement. □

Cette équation permet d'exprimer la série $K_0(x)$ en fonction de la série génératrice $A(x)$ des arborescences de Cayley. En effet, on déduit du lemme 83 que

$$-\frac{x}{K_0(x)-1} = x\ e^{\frac{-x}{K_0(x)-1}}.$$

Comme $A(x) = x\ e^{A(x)}$, on en déduit que

$$-\frac{x}{K_0(x)-1} = A(x),$$

ce qui entraîne immédiatement que

$$K_0(x) - 1 = -\frac{1}{e^{A(x)}}.$$

On peut alors applique l'inversion de Lagrange (théorème 14) avec $G(x) = e^x$ et $H(x) = -e^{-x}$:

$$[x^n](K_0(x)-1) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]e^{(n-1)x}$$

$$\Longrightarrow [x^n](K_0(x)-1) = [x^{n-1}]\sum_{k\geq 0}\frac{(n-1)^k x^k}{n\ (k)!} \Longrightarrow [x^n](K_0(x)-1) = \frac{(n-1)^{n-1}}{n!}.$$

Ceci termine la preuve du théorème 82.

4.2.2 Une preuve bijective

Le nombre d'arborescences ordonnées alternantes sur $[n]$ telles que la racine est inférieure à ses fils étant $(n-1)^{n-1}$, les résultats du chapitre 2, et notamment le lemme 17, incitent à chercher une bijection entre $\mathcal{K}_{n,0}$ et $\mathcal{A}_{n,0}$. Dans ce paragraphe, nous décrivons une telle correspondance.

Définition 84. Soit A une arborescence et x un sommet de A, différent de la racine et ayant y pour père : x est une *double-descente* (resp. *double-montée* si $y > x$ (resp. $y < x$) et x a un fils $z < x$ (resp. $z > x$).

Propriété 85. Une arborescence est alternante si et seulement si elle ne possède ni double-descente, ni double-montée.

Définition 86. Un *parcours en profondeur préfixe* d'une arborescence A est un parcours récursif débutant à la racine de A et dans lequel, après avoir visité un sommet x (ayant k fils ordonnés (de gauche à droite) $x_1,\ldots,x_k$), on visite successivement A_{x_1}, puis A_{x_2}, etc.

Algorithme 4: De $\mathcal{A}_{n,0}$ vers $\mathcal{K}_{n,0}$

Données : A : arborescence de $\mathcal{A}_{n,0}$
Résultat : A' : arborescence de $\mathcal{K}_{n,0}$
début
  pour chaque sommet x de A **faire**
    ordonner ses fils en croissant de gauche à droite;
  tant que A n'est pas une arborescence ordonnée alternante **faire**
    effectuer un parcours en profondeur préfixe de A et soit x le premier sommet visité tel que son père y est double-montée (resp. double-descente);
    soient $x_1, \dots ,x_k$ les fils de x tels que $x_i > x$ (resp. $x_i < x$) et $A_1, \dots ,A_k$ les sous-arborescences de racines respectives $x_1, \dots ,x_k$;
    placer les A_i à gauche (resp. droite) de y : x_k devient le frère gauche de x, x_{k-1} celui de x_k, etc (resp. x_1 devient le frère droit de x, x_2, celui de x_1, etc);
fin

Cet algorithme consiste donc à éliminer les doubles-descentes et les doubles-montées jusqu'à obtenir une arborescence ordonnée alternante. La figure qui suit présente une exécution de cet algorithme, où à chaque étape les arêtes reliant x aux sommets x_i mis en jeu sont données en pointillé.

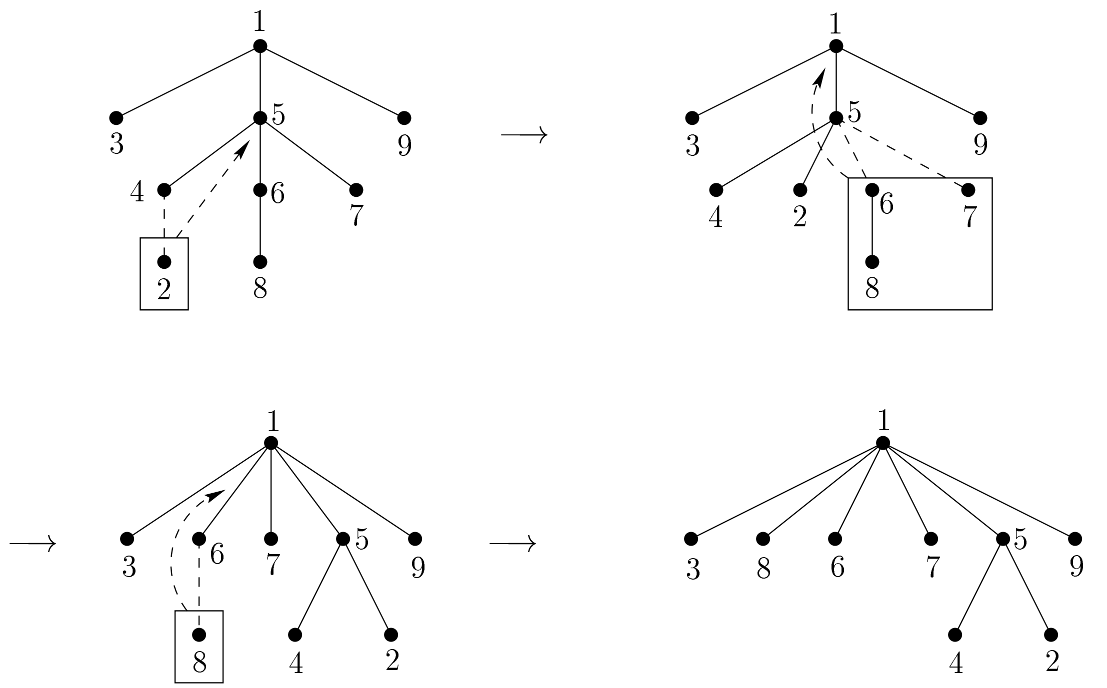


FIG. 4.6 – Exemple d'exécution de l'algorithme 4

Algorithme 5: De $\mathcal{K}_{n,0}$ vers $\mathcal{A}_{n,0}$

Données : A : arborescence de $\mathcal{K}_{n,0}$
Résultat : A' : arborescence de $\mathcal{A}_{n,0}$
début
  pour chaque sommet x de A différent de la racine **faire**
    si le père de x est inférieur (resp supérieur) à x **alors**
      soient y le premier frère de x situé à sa gauche (resp. droite) tel que $y < x$ (resp. $y > x$), $x_1 < \cdots < x_k$ les sommets situés entre y et x (resp. entre x et y) et $A_1, \ldots, A_k$ les sous-arborescences de racines respectives $x_1, \ldots, x_k$;
      déplacer les A_i à la droite du dernier (resp. gauche du premier) fils de x : x_k est le dernier fils de x, x_{k-1} le frère gauche de x_k, etc (resp. x_1 est le premier fils de x, x_2 le frère droit de x, etc);
fin

On vérifie aisément que ces deux algorithmes définissent bien une bijection entre $\mathcal{K}_{n,0}$ et $\mathcal{A}_{n,0}$, ce qui prouve le théorème 82.

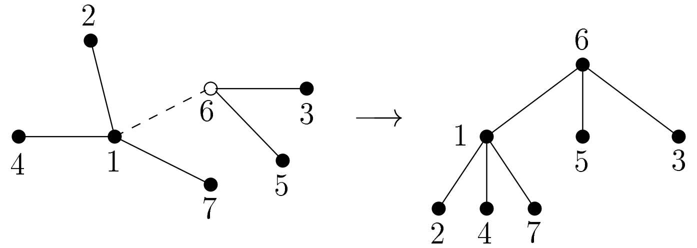
4.2.3 Arbres ordonnés et arborescences planes alternants

Si on considère les arbres (arborescences non enracinées) ordonnés alternants, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 87. *Le nombre d'arbres ordonnés alternants non enracinés sur $[n]$ est*

$$(n-1)^{n-2}.$$

Preuve. On rappelle que k_n est le nombre d'arborescences ordonnées alternantes et l_n le nombre d'arbres ordonnés alternants. On a une bijection entre les triplets $(A,(x,y),z)$ où A est un arbre ordonné alternant sur $[n]$, (x,y) une arête de A, et z un des sommets de cette arête (soit x, soit y), et les arborescences ordonnées alternantes sur $[n]$: pour obtenir une arborescence ordonnée à partir de $(A,(x,y),z)$, on enracine A en z et on impose que son premier fils est l'autre sommet de l'arête (x,y).



On en déduit l'identité

$$k_1 = l_1 = 1,\ k_n = 2(n-1)l_n\ (n > 1),$$

qui, combinée au théorème 82 conclut la preuve. $\square$

Considérons maintenant les arborescences planes alternantes. Tout arbre ordonné alternant détermine, par le choix d'un sommet racine, une arborescence plane alternante. Il s'ensuit le corollaire suivant.

Corollaire 88. *Le nombre d'arborescence planes alternantes sur* $[n]$ *est*

$$n(n-1)^{n-2}.$$

Il est alors naturel de se poser la question suivante.

Question 89. Quel est le nombre d'arborescences cycliques alternantes sur $[n]$? Pour $n = 9$, on obtient les premières valeurs suivantes calculées expérimentalement.

$$1 \quad 2 \quad 6 \quad 30 \quad 216 \quad 2026 \quad 23406 \quad 321678 \quad 5097760$$

La consultation de l'ouvrage classique de Sloane et l'interrogation du serveur Web associé, [144, 143], ne donnent aucune information supplémentaire sur cette suite de nombres.

Chapitre 5

La formule de Lagrange multidimensionnelle

Dans ce chapitre, nous présentons une extension de la formule de Lagrange aux structures combinatoires coloriées et aux séries multivariées, connue sous le nom de formule de Good. Après une présentation de cette formule et d'une de ses variantes (section 5.1), nous proposons une nouvelle preuve combinatoire de cette variante (section 5.2). Nous concluons en illustrant l'intérêt des preuves combinatoires de la formule de Lagrange multidimensionnelle, qui permettent de fournir des explications simples de formules obtenues par application de la formule de Good (sections 5.3 et 5.4), et de déduire de ces explications des algorithmes de génération aléatoire (section 5.4).

5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons utilisé la formule d'inversion de Lagrange pour énumérer des structures arborescentes selon un seul paramètre, à savoir le nombre de sommets. Il est cependant fréquent de vouloir énumérer des structures combinatoires selon plusieurs paramètres. Pour les arborescences, on peut par exemple penser au nombre de sommets et au nombre de feuilles. On peut aussi considérer des arborescences dont les sommets sont de diverses sortes, que l'on représente habituellement par des couleurs (à chaque sorte de sommets correspond une couleur), la sorte d'un sommet pouvant influencer la structure de sa fibre. On parle alors d'arborescences coloriées (ou multisortes).

Par exemple la famille des arborescences de Cayley bichromatiques est la famille des arborescences telles que

- chaque sommet est colorié avec une couleur choisie parmi 2 (blanc ou noir, par exemple),
- la fibre de chaque sommet est munie d'une $\mathcal{E}$-structure (structure d'ensemble),
- la fibre d'un sommet blanc (resp. noir) ne contient pas de sommet blanc (resp. noir).

Si une telle arborescence a n_1 (resp. n_2) sommets blancs (resp. noirs), on étiquette ces sommets par $\{1,2,\ldots,n_1\}$ (resp. $\{1,2,\ldots,n_2\}$), la couleur permettant de distinguer les sommets ayant même étiquette.

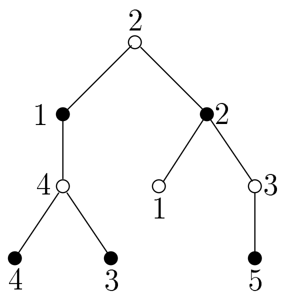


Fig. 5.1 – Une arborescence de Cayley bichromatique

Il est alors naturel de vouloir énumérer ces arborescences non plus seulement selon le nombre de sommets (le nombre d'arborescences bichromatiques à n sommets est $2n^{n-1}$, la couleur de la racine déterminant celle de tous les autres sommets), mais suivant le nombre de sommets de chaque couleur. Pour cela, on associe à une telle famille d'arborescences une *série génératrice multivariée*: si a_{n_1,n_2} est le nombre d'arborescences de Cayley bichromatiques ayant n_1 (resp. n_2) sommets blancs (resp. noirs), la série génératrice de ces arborescences comptées selon le nombre de sommets de chaque couleur est

$$A(x_1,x_2) = \sum_{n_1,n_2 \geq 0} a_{n_1,n_2} \frac{x_1^{n_1}}{n_1!} \frac{x_2^{n_2}}{n_2!}.$$

Si on note $A_1(x_1,x_2)$ (resp. $A_2(x_1,x_2)$) la série génératrice des arborescences de Cayley bichromatiques de racine de couleur blanche (resp. noire), les séries $A(x_1,x_2)$, $A_1(x_1,x_2)$, $A_2(x_1,x_2)$ vérifient le système d'équations fonctionnelles suivant :

$$A(x_1,x_2) = A_1(x_1,x_2) + A_2(x_1,x_2), \tag{5.1}$$

$$A_1(x_1,x_2) = x_1 e^{A_2(x_1,x_2)}, \tag{5.2}$$

$$A_2(x_1,x_2) = x_2 e^{A_1(x_1,x_2)}. \tag{5.3}$$

5.1.1 La formule de Good

Pour traiter ce type de problèmes d'énumération de structures arborescentes coloriées, on peut utiliser la généralisation suivante de la formule de Lagrange, communément appelée *inversion de Lagrange multidimensionnelle* ou *formule de Good*, puisqu'elle est due à Good [72].

Théorème 90. [72] *Soient m un entier, $\mathbf{x}$ le vecteur $(x_1,\dots,x_m)$ de variables formelles, $H(\mathbf{x}),G_1(\mathbf{x}),\dots,G_m(\mathbf{x})$ des séries formelles multivariées telles que $G_i(0,\dots,0) \neq 0$ pour $i = 1,\dots,m$. L'ensemble d'équations*

$$F_i(\mathbf{x}) = x_i G_i(F_1(\mathbf{x}),\dots,F_m(\mathbf{x})),\ i = 1,\dots,m \tag{5.4}$$

détermine alors la série formelle $H(F_1(\mathbf{x}),\dots,F_m(\mathbf{x}))$ par :

$$[\mathbf{x}^\mathbf{n}] \left\{ \frac{H(F_1(\mathbf{x}),\dots,F_m(\mathbf{x}))}{\det\left(\delta_{i,j} - x_i \dfrac{\partial G_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right)_{m\times m}} \right\} = [\mathbf{x}^\mathbf{n}] \left\{ H(\mathbf{x}) \left(\prod_{i=1}^{m} (G_i(\mathbf{x}))^{n_i} \right) \right\}, \tag{5.5}$$

où $[\mathbf{x}^{\mathbf{n}}] = [x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}]$ *et* $\delta_{i,j} = 1$ *si* $i = j$ *et* 0 *sinon, ou bien*

(5.6)

$$\{[\mathbf{x}^{\mathbf{n}}]H(F_1(\mathbf{x}),\ldots,F_m(\mathbf{x}))\} = [\mathbf{x}^{\mathbf{n}}]H(\mathbf{x})\left(\prod_{i=1}^{m}(G_i(\mathbf{x}))^{n_i}\right)\det\left(\delta_{i,j} - \frac{x_i}{G_j(\mathbf{x})}\frac{\partial G_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right)_{m\times m}$$

On remarque alors que dans le cas $m = 1$, les deux identités (5.5) et (5.6) sont équivalentes, et on retrouve, après un rapide calcul, le théorème 14. Les identités (5.5) et (5.6), qui sont appelées respectivement *forme implicite* et *forme explicite* de la formule de Good, sont en fait équivalentes (cf [16, section 3.2]). Dans les problèmes d'énumération, la forme explicite est la plus fréquemment utilisée.

Revenons à notre exemple des arborescences de Cayley bichromatiques. Le système d'équations fonctionnelles (5.1), (5.2) et (5.3) satisfait les conditions du théorème 90 et on peut donc appliquer la forme explicite de la formule de Good avec $H(x_1,x_2) = x_1 + x_2$, $G_1(x_1,x_2) = e^{x_2}$ et $G_2(x_1,x_2) = e^{x_1}$. Le déterminant du membre droit de (5.6) vaut $1 - x_1x_2$, et le nombre d'arborescences de Cayley bichromatiques à n_1 sommets blancs et n_2 sommets noirs, avec $n_1,n_2 > 0$ est donc

$$n_1!n_2!\left([x_1^{n_1}x_2^{n_2}](x_1+x_2)e^{n_1x_2}e^{n_2x_1}(1-x_1x_2)\right),$$

ce qui donne

$$(n_1+n_2)n_1^{n_2-1}n_2^{n_1-1},$$

un résultat dû à Scoins [138].

Le théorème 90 est dû à Good [72], qui l'a utilisé dans le cadre de l'énumération d'arborescences [73, 74] (l'exemple des arborescences de Cayley bichromatiques est d'ailleurs tiré de [73]). Il a ensuite été suivi par plusieurs auteurs, notamment Tutte [158], Knuth [101], Goulden et Jackson [95, 76, 77], qui ont introduit une nouvelle forme de la formule de Lagrange multivariée (dont nous proposons une preuve bijective dans la section 5.2) permettant d'énumérer diverses familles d'arborescences dont la partition des arêtes est fixée, ou encore certaines familles de chemins dans des graphes [75]. Récemment, cette technique a été utilisée dans le cadre de l'énumération de cactus planaires par Goulden et Jackson [78] et Bóna, Bousquet, Labelle et Leroux [21].

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 1, il existe plusieurs preuves de la formule de Lagrange unidimensionnelle dues notamment à Raney [131] et Labelle [108]. La première preuve combinatoire d'une formule de Lagrange multidimensionnelle est due à Chottin [42]. Cette preuve est une extension de la preuve de Raney, dans le cas $m = 2$ (c'est-à-dire des séries bivariées). Chottin a été le premier à faire le lien entre cette preuve (et donc celle de Raney) et l'énumération d'arborescences planes non étiquetées dont les sommets sont pondérés par les coefficients des séries $G_1(x_1,x_2)$ et $G_2(x_1,x_2)$ [43] (on pourra se référer à Cori [49] pour un exposé de synthèse présentant les résultats de Raney et Chottin). La première preuve combinatoire de la formule de Good pour un nombre quelconque de variables est due à Gessel [62]. Il propose une extension de la preuve de Labelle de la formule unidimensionnelle et démontre ainsi la forme implicite de la formule de Good. Cette preuve de Gessel, basée sur une bijection entre arborescences coloriées et endofonctions coloriées a été reprise dans la cadre de la théorie des espèces par Bergeron, Labelle et Leroux [16, section 3.2]. La première preuve combinatoire de la forme explicite est due à Ehrenborg et Méndez [57], mais cette preuve n'est pas directe. On peut aussi citer les travaux de Strehl [150] (voir aussi [16, exercice 3.2.16]). Goulden et Kulkarni [80] en ont une nouvelle preuve en introduisant une nouvelle expression de la formule de Good, que nous présentons maintenant.

5.1.2 La forme arborescente de la formule de Good

Pour prouver la forme explicite de la formule de Good, Goulden et Kulkarni [80] introduisent une formule d'inversion appelée *forme arborescente de la formule de Good*, car basée sur la notion de dérivée d'un vecteur de séries formelles par rapport à une arborescence orientée.

Définition 91. Soient G un graphe orienté étiqueté ayant pour ensemble de sommets $S = \{1,\ldots, m\}$ et ensemble d'arcs A, $\mathbf{x} = (x_1,\cdots,x_m)$ un vecteur de variables formelles et $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = (R_1(\mathbf{x}),\cdots,R_m(\mathbf{x}))$ un vecteur de séries formelles en les variables $\mathbf{x}$. On définit la dérivée de $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ par rapport à G par

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{x})}{\partial G} = \prod_{j\in S}\left\{\left(\prod_{(i,j)\in A}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) R_j(\mathbf{x})\right\},$$

où $(i,j) \in A$ fait référence à un arc allant du sommet i vers le sommet j.

Par exemple, si $m = 4$ et G est le graphe suivant,

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & 2 \arrow[l] \\ 4 \arrow[u] \arrow[r] & 3 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

alors,

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{x})}{\partial G} = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_4}\right) R_1(\mathbf{x})\right\}\left\{\frac{\partial R_2(\mathbf{x})}{\partial x_3}\right\}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_4}\right) R_3(\mathbf{x})\right\} R_4(\mathbf{x}).$$

Goulden et Kulkarni, utilisant cette notion, ont montré que la forme explicite de la formule de Good (5.6) est équivalente à la formule (5.7) qui suit, dans laquelle le déterminant du membre droit de (5.6) est remplacé par une somme de termes positifs définis à partir de dérivées selon des arborescences orientées.

Théorème 92. [80] *Soient m un entier, $\mathbf{x}$ le vecteur $(x_1,\cdots,x_m)$ de variables formelles, $H(\mathbf{x}),G_1(\mathbf{x}),\ldots, G_m(\mathbf{x})$ des séries formelles multivariées telles que $G_i(0,\ldots,0) \neq 0$ pour $i = 1,\ldots,m$. L'ensemble d'équations*

$$F_i(\mathbf{x}) = x_i G_i(F_1(\mathbf{x}),\ldots,F_m(\mathbf{x})),\ i = 1,\ldots,m$$

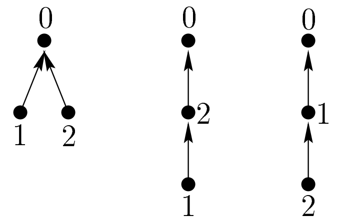
détermine alors de manière unique la série formelle $H(F_1(\mathbf{x}),\ldots,F_m(\mathbf{x}))$ par : .

(5.7)
$$\{[\mathbf{x}^{\mathbf{n}}]H(F_1(\mathbf{x}),\ldots,F_m(\mathbf{x}))\} = \left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{n_i}\right)[\mathbf{x}^{\mathbf{n}-\mathbf{1}}]\sum_T \frac{\partial(H(\mathbf{x}),(G_1(\mathbf{x}))^{n_1},\ldots,(G_m(\mathbf{x}))^{n_m})}{\partial T},$$

où $\mathbf{n}-\mathbf{1} = (n_1-1,\ldots,n_m-1)$ et la somme porte sur toutes les arborescences orientées T ayant $\{0,1,\ldots,m\}$ pour ensemble de sommets, 0 pour racine et dont tous les arcs sont orientés vers la racine.

On remarque que si $m = 1$, il y a une seule arborescence T (de racine 0 ayant un seul fils, étiqueté 1) et on retrouve la formule d'inversion de Lagrange unidimensionnelle (théorème 14).

Revenons encore à notre exemple des arborescences bichromatiques (équations (5.1), (5.2) et (5.3)). On a $m = 2$ et il y a 3 arborescences sur les sommets $\{0,1,2\}$ de racine 0 dont tous les arcs sont orientées vers 0 :



En appliquant (5.7), le nombre d'arborescences bichromatiques ayant n_1 (resp. n_2) sommets blancs (resp. noirs) est

$$(n_1-1)!(n_2-1)![x_1^{n_1-1}x_2^{n_2-1}]\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1+x_2)\right)e^{n_1x_2}e^{n_2x_1}+$$

$$(n_1-1)!(n_2-1)![x_1^{n_1-1}x_2^{n_2-1}]\frac{\partial(x_1+x_2)}{\partial x_2}e^{n_1x_2}\frac{\partial e^{n_2x_1}}{\partial x_1}+$$

$$(n_1-1)!(n_2-1)![x_1^{n_1-1}x_2^{n_2-1}]\frac{\partial(x_1+x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial e^{n_1x_2}}{\partial x_2}e^{n_2x_1},$$

ce qui donne immédiatement

$$(n_1+n_2)n_1^{n_2-1}n_2^{n_1-1}.$$

Goulden et Kulkarni [80] proposent une preuve bijective de la formule 5.7, basée sur une extension de la bijection de Labelle entre arborescences et endofonctions, ce qui constitue la première preuve bijective directe de la forme explicite de la formule de Good. On peut noter qu'une preuve du théorème 92 restreint au cas des séries à deux variables avait été ébauchée par Leroux [110] et que le théorème 92 a été obtenu indépendamment par Bender et Richmond [11]. Ces derniers ont notamment utilisé le fait que le membre droit de (5.7) est constitué d'une somme de termes positifs (contrairement au membre droit de (5.6) faisant intervenir un déterminant) pour en déduire des propriétés asymptotiques de structures "lagrangiennes" coloriées [12].

5.2 Preuve de la forme arborescente de la formule de Good

Dans cette section, nous proposons une nouvelle preuve combinatoire du théorème 92. Cette preuve est basée sur le même principe que celle de Goulden et Kulkarni, à savoir une bijection entre arborescences coloriées et endofonctions coloriées, mais présente l'avantage d'être plus simple à présenter et à prouver.

Nous considérons ici des structures combinatoires m-coloriées. Soient $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_m)$ un vecteur de m couleurs et $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_m)$ un vecteur de m variables formelles. On introduit une classe $\mathcal{H}$ de structures m-coloriées, de série génératrice multivariée $H(\mathbf{x})$ (x_i comptant les éléments de couleur c_i), et un vecteur $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_1,\ldots,\mathcal{G}_m)$ de m classes de structures combinatoires m-coloriées de séries génératrices multivariées respectives $G_1(\mathbf{x}),\ldots,G_m(\mathbf{x})$. On note $[\mathbf{n}] = [n_1]\cup\cdots\cup[n_m]$, $\mathbf{n}! = \prod_{i=1}^m n_i!$, et on appelle structure sur $[\mathbf{n}]$ une structure m-coloriée ayant n_i sommets de couleur c_i, pour $i = 1,\ldots,m$.

5.2.1 Arborescences et endofonctions coloriées

($\mathcal{H}$,$\mathcal{G}$)-arborescences. On a vu au chapitre 1 que, lorsque $m = 1$, le nombre de $\mathcal{H}$-assemblées de $\mathcal{G}_1$-arborescences sur $[n_1]$ est égal à $n_1![x_1^{n_1}]H(A_{G_1}(x_1))$, où $A_{G_1}(x_1)$ est la série génératrice exponentielle des $\mathcal{G}_1$-arborescences, qui vérifie l'équation fonctionnelle $A_{G_1}(x_1) = x_1G_1(A_{G_1}(x_1))$. On peut donc, dans le cas $m = 1$, interpréter le membre gauche de la formule (5.7) en termes de $\mathcal{H}$-assemblées de $\mathcal{G}_1$-arborescences sur $[n_1]$. Pour traiter le cas général ($m \geq 1$) on introduit les notions de $\mathcal{G}$-arborescences et ($\mathcal{H}$,$\mathcal{G}$)-arborescences.

Définition 93. Une $\mathcal{G}$-*arborescence* A sur $[\mathbf{n}]$ est une arborescence m-coloriée sur l'ensemble de sommets $[\mathbf{n}]$ telle que, pour $i = 1,\ldots,m$, la fibre de tout sommet de couleur c_i est munie d'une $\mathcal{G}_i$-structure.

Définition 94. Une ($\mathcal{H}$,$\mathcal{G}$)-*arborescence* sur $[\mathbf{n}]$ est une $\mathcal{H}$-assemblée de $\mathcal{G}$-arborescences. Une ($\mathcal{H}$,$\mathcal{G}$)-arborescence sur $[\mathbf{n}]$ est représentée par une arborescence sur l'ensemble de sommets $\{0\} \cup [\mathbf{n}]$, noté $[0,\mathbf{n}]$, de racine 0, telle que la fibre de cette racine est munie d'une $\mathcal{H}$-structure et, pour $i = 1,\ldots,m$, la fibre de tout sommet de couleur c_i est munie d'une $\mathcal{G}_i$-structure.

Par exemple, la figure 5.2 représente une ($\mathcal{H}$,$\mathcal{G}$)-arborescence avec $m = 3$ (les sommets sont blancs, gris ou noirs). Dans cette figure, on représente la structure de la fibre d'un sommet par un arc de cercle indicé par la structure dont est munie cette fibre. Par la suite, on omettra cet arc de cercle, la structure étant implicitement déterminée par la couleur du sommet.

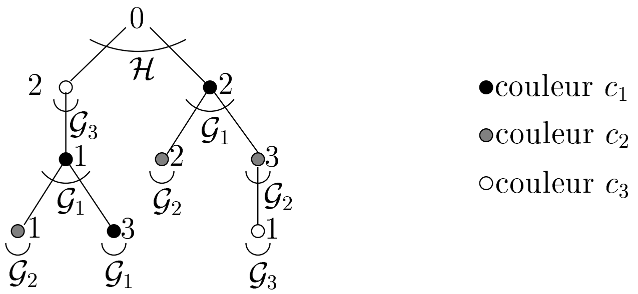


FIG. 5.2 – ($\mathcal{H}$,$\mathcal{G}$)-arborescence à trois couleurs ($m = 3$)

Si on note $A_{(H,\mathbf{G})}(\mathbf{x})$ (resp. $A_{G_i}(\mathbf{x})$, pour $i = 1,\ldots,m$) la série génératrice exponentielle des ($\mathcal{H}$,$\mathcal{G}$)-arborescences (resp. des $\mathcal{G}$-arborescences de racine de couleur c_i), on obtient par une application directe de la composition de séries génératrices (cf section 1.2.2)

$$A_{(H,\mathbf{G})}(\mathbf{x}) = H(A_{G_1}(\mathbf{x}),\ldots,A_{G_m}(\mathbf{x}))$$

$$A_{G_i}(\mathbf{x}) = x_iG_i(A_{G_1}(\mathbf{x}),\ldots,A_{G_m}(\mathbf{x})),\ i = 1,\ldots,m,$$

et on en déduit le lemme suivant, interprétant le membre gauche de (5.7) en termes de ($\mathcal{H}$,$\mathcal{G}$)-arborescences.

Lemme 95. *Le nombre de ($\mathcal{H}$,$\mathcal{G}$)-arborescences sur $[\mathbf{n}]$ est*

$$\mathbf{n}![\mathbf{x}^{\mathbf{n}}]H(A_{G_1}(\mathbf{x}),\ldots,A_{G_m}(\mathbf{x})), \tag{5.8}$$

$(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonctions restreintes. On peut interpréter combinatoirement le membre droit de (5.7) à l'aide d'une généralisation de la notion d'endofonction, que nous avons déjà vue au chapitre 2 (preuve de la proposition 29).

Définition 96. Une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-*endofonction partielle* sur $[\mathbf{n}]$ est une fonction f de $[\mathbf{n}]$ dans $[0,\mathbf{n}]$ telle que la préimage de 0, $f^{-1}(0)$, est munie d'une $\mathcal{H}$-structure et, pour $i = 1,\dots,m$, la préimage de tout élément u de couleur c_i ($u \in [n_i]$), $f^{-1}(u)$, est munie d'une $\mathcal{G}_i$-structure.

On représente habituellement une endofonction f par un graphe orienté dans lequel un arc de u vers v indique que $f(u) = v$. Tout comme pour les arborescences, on peut indiquer la structure des préimages par un arc de cercle indicé par la structure dont est munie une préimage. Par la suite, on omettra cet arc de cercle, la structure étant implicitement déterminée par la couleur du sommet image.

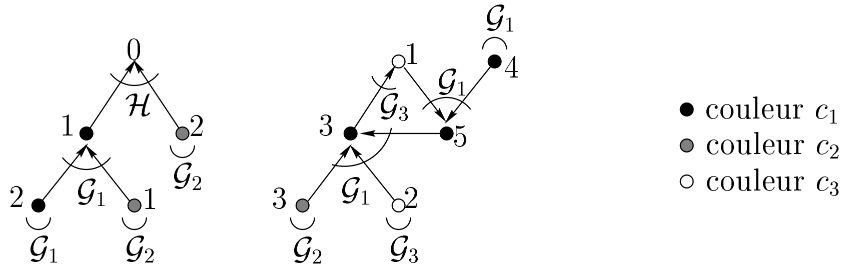


FIG. 5.3 – $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonction avec $m = 3$

Définition 97. Soit f une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonction partielle sur $[\mathbf{n}]$. On appelle *graphe des couleurs de* f le graphe orienté à $(m+1)$ sommets étiquetés par $\{0\} \cup [m]$, ayant un arc de i vers 0 (resp. j) si et seulement si l'élément 1 de couleur c_i a pour image 0 (resp. un élément de couleur c_j).

Le graphe des couleurs d'une endofonction est donc déterminé par les sommets d'étiquette 1 de chaque couleur.

Définition 98. Une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-*endofonction restreinte* sur $[\mathbf{n}]$ est une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonction partielle f dont le graphe des couleurs est une arborescence de racine 0 ayant tous les arcs orientés vers la racine 0.

L'endofonction de la figure 5.3 est une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonction restreinte comme le montre la figure qui suit.

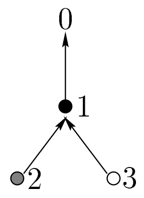


FIG. 5.4 – Graphe des couleurs de l'endofonction de la figure 5.3

Dans la suite, on considère les endofonctions comme des graphes orientés et, pour tout élément u, on appelle parfois fibre sa préimage $f^{-1}(u)$. On relie ces endofonctions au membre droit de (5.7) par le résultat suivant [80].

Lemme 99. *Le nombre de* $(\mathcal{H},\mathcal{G})$*-endofonctions restreintes sur* $[\mathbf{n}]$ *est*

$$(\mathbf{n}-\mathbf{1})![\mathbf{x}^{\mathbf{n}-\mathbf{1}}]\sum_T \frac{\partial(H(\mathbf{x}),(G_1(\mathbf{x}))^{n_1},\ldots,(G_m(\mathbf{x}))^{n_m})}{\partial T}, \tag{5.9}$$

la somme portant sur toutes les arborescences orientées T *ayant* $\{0,1,\ldots,m\}$ *pour ensemble de sommets,* 0 *pour racine et dont les arcs sont tous orientés vers la racine* 0.

Preuve. Si $\mathcal{C}$ est une classe de structures combinatoires m-coloriées telle que $c_{\mathbf{n}}$ est le nombre de $\mathcal{C}$-structures sur $[\mathbf{n}]$, $\mathcal{C}$ a pour série génératrice exponentielle

$$C(\mathbf{x}) = \sum_{n_1,\ldots,n_m\geq 0} c_{\mathbf{n}}\frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}.$$

En notant $C_i(\mathbf{x})$ la série $\partial C(\mathbf{x})/\partial x_i$, on a

$$C_i(\mathbf{x}) = \sum_{n_1,\ldots,n_{i-1},n_{i+1},\ldots,n_m\geq 0,n_i\geq 1} c_{\mathbf{n}}\frac{x_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{x_i^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\cdots\frac{x_m^{n_m}}{n_m!}.$$

$C_i(\mathbf{x})$ représente donc la série génératrice exponentielle des $\mathcal{C}$-structures ayant au moins un élément de couleur c_i, l'un de ces éléments de couleur c_i n'étant pas "compté" par la variable x_i. On peut, sans perte de généralité, supposer que l'élément non pris en compte est le plus petit élément de couleur c_i, et on en déduit que le nombre de $\mathcal{C}$-structures sur $[\mathbf{n}]$ telles que $n_i \geq 1$ est

$$n_1!\cdots(n_i-1)!\cdots n_m![x_1^{n_1}\cdots x_i^{n_i-1}\cdots x_m^{n_m}]\frac{\partial C_i(\mathbf{x})}{\partial x_i}.$$

Une endofonction peut aussi être représentée comme la liste ordonnée des préimages de ses éléments, ces éléments étant ordonnés par couleurs croissantes ($c_i > c_j$ si et seulement si $i > j$), puis par ordre croissant des éléments d'une même couleur, 0 étant inférieur à tout autre élément, comme l'illustre la figure suivante.

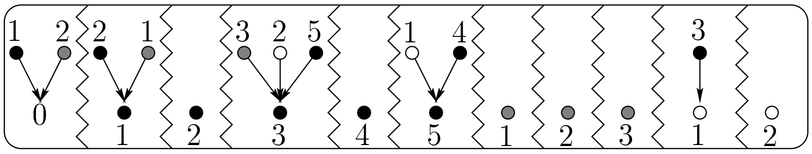


FIG. 5.5 – Représentation de l'endofonction de la figure 5.3

On en déduit donc qu'une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonction partielle (non forcément restreinte) sur $[\mathbf{n}]$ est une $(\mathcal{H}\prod_{i=1}^m \mathcal{G}_i^{n_i})$-structure sur $[\mathbf{n}]$ (voir [16, section 3.2]) et, par application des résultats classiques sur la multiplication de séries génératrices (voir chapitre 1), que le nombre de $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonctions partielles sur $[\mathbf{n}]$ est

$$\mathbf{n}![\mathbf{x}^{\mathbf{n}}]H(\mathbf{x})\left(\prod_{i=1}^m (G_i(\mathbf{x}))^{n_i}\right).$$

Le graphe des couleurs d'une endofonction étant déterminé par les éléments 1 de chaque couleur, en appliquant les résultats précédents aux endofonctions restreintes (le graphe des couleurs est une arborescence orientée de racine 0 aux arcs orientés vers la racine), on en déduit le résultat voulu. □

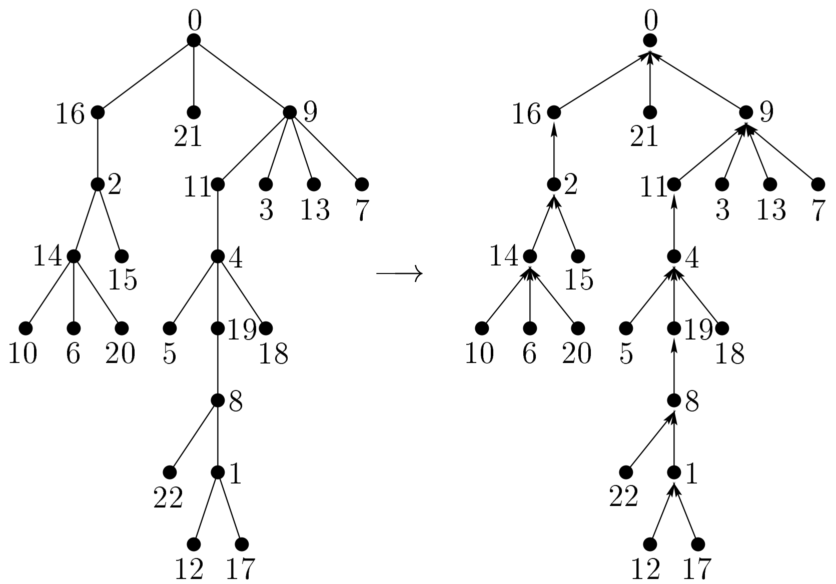
Il découle de (5.7), (5.8) et (5.9), que l'obtention d'une bijection entre les $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-arborescences sur $[\mathbf{n}]$ et les $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonctions restreintes sur $[\mathbf{n}]$ induit une preuve bijective du théorème 92. Goulden et Kulkarni ont proposé une telle bijection. Dans la suite de cette section, nous présentons une nouvelle bijection plus simple que la leur.

5.2.2 Le cas unidimensionnel : la formule de Lagrange

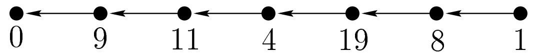
Nous commençons par traiter le cas unidimensionnel, c'est-à-dire la formule de Lagrange classique. Nous présentons dans un premier temps la preuve de Labelle [108], qui sert de base à la preuve de Goulden et Kulkarni dans le cas multidimensionnel. Nous en proposons ensuite une variante, que nous étendons à notre tour au cas multidimensionnel dans le paragraphe suivant.

Dans le cas unidimensionnel ($m = 1$), le vecteur $\mathcal{G}$ se réduit à $\mathcal{G}_1$. Les $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-arborescences sur $[\mathbf{n}]$ se réduisent alors à des arborescences sur $[0,n_1]$ de racine 0 telles que la fibre de 0 est munie d'une $\mathcal{H}$-structure et la fibre de tout autre sommet est muni d'une $\mathcal{G}_1$-structure. Les $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonctions restreintes sur $[\mathbf{n}]$ se réduisent aux fonctions f de $[n_1]$ dans $[0,n_1]$ telles que $f(1) = 0$ (cette condition est due à la contrainte sur le graphe des couleurs de f qui doit être dans ce cas l'arborescence $1 \to 0$), la fibre de 0 est munie d'une $\mathcal{H}$-structure et la fibre de tout autre élément est munie d'une $\mathcal{G}_1$-structure.

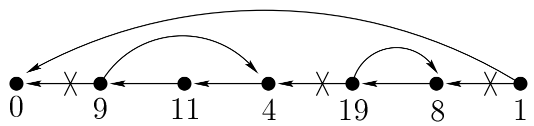
La bijection de G. Labelle. Soit A une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-arborescence. On définit tout d'abord une endofonction f'_A en orientant toutes les arêtes de A vers la racine 0 (la structure dont est munie la fibre d'un élément se transporte évidemment de A vers f'_A). f'_A est donc une endofonction partielle, mais n'est pas forcément restreinte (on n'a pas en général $f'_A(1) = 0$).



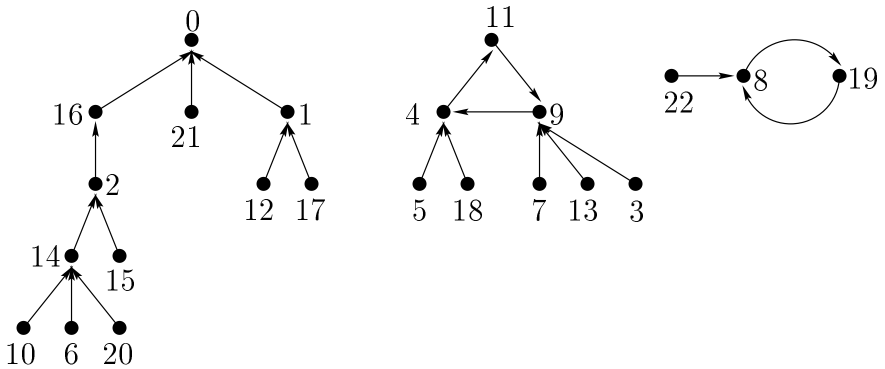
On appelle *colonne vertébrale* de f'_A le chemin dans l'arborescence reliant le sommet 0 au sommet 1. On note $(u_0,u_1,\ldots,u_k)$ ce chemin ($u_0 = 0$, $u_k = 1$ et u_i est fils de u_{i-1}, pour $1 \leq i \leq k$). La colonne vertébrale de l'exemple ci-dessus est le chemin suivant.



Pour $1 \leq i < k$, on dit que u_i est un *minimum à droite* de l'ensemble ordonné $(u_0,\ldots,u_{k-1})$ si il n'existe pas d'entier j tel que $0 \leq i < j < k$ et $u_j < u_i$. On note l le nombre de minima à droite et $(v_0 = 0,\ldots,v_{l-1})$ l'ensemble des minima à droite. Dans notre exemple, $l = 3$ et $(v_0,v_1,v_2) = (0,4,8)$. Soit w_i le successeur de v_i sur le chemin allant de 0 à 1 ($(w_0,w_1,w_2) = (9,19,1)$). On transforme alors f'_A en une endofonction restreinte f_A en permutant circulairement les w_i : pour i allant de 0 à $l-1$, on remplace, dans la fibre de v_i (c'est-à-dire dans la $\mathcal{H}$-structure ou $\mathcal{G}_1$-structure correspondante), w_i par w_{i-1} si $i > 0$ et w_0 par w_{l-1}. Cela revient à modifier la colonne vertébrale de la façon suivante (ces modification s'effectuant donc dans l'arborescence de départ) :



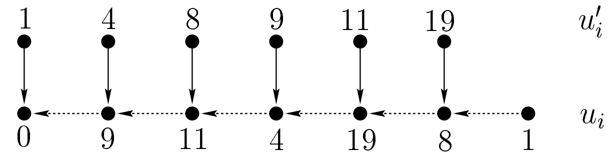
et on obtient l'endofonction suivante :



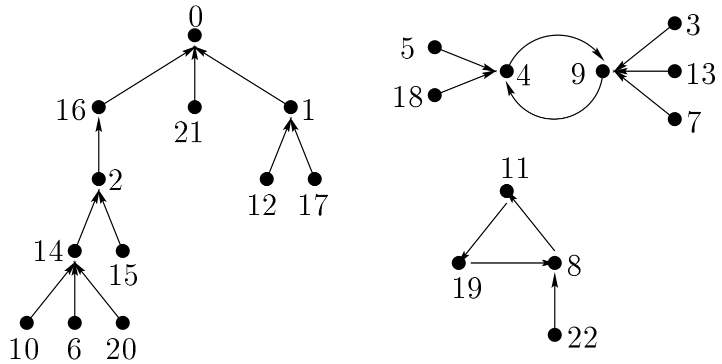
L'endofonction f_A ainsi obtenue est bien une endofonction restreinte car $f_A(1) = 0$. De plus, les cycles (il y en a exactement $l-1$) sont constitués uniquement des éléments $u_1,\ldots,u_{k-1}$, chacun contenant exactement un minimum à droite différent de 0.

La construction inverse, transformant f_A en A, se déduit immédiatement de ces constats. Soient $l-1$ le nombre de cycles de f_A, $v_1 < \cdots < v_{l-1}$ les éléments minimaux de chaque cycle et, pour $1 \leq i \leq l-1$, w_i l'élément de la fibre de v_i situé sur son cycle. On pose de plus $v_0 = 0$ et $w_0 = 1$. Pour obtenir une arborescence, il suffit alors d'effectuer la transformation suivante : pour i allant de 0 à $l-1$, remplacer, dans la fibre de v_i, w_i par w_j où $j = (i+1) \mod l$.

Une variante de cette bijection. La variante que nous proposons est basée elle aussi sur une transformation de la colonne vertébrale de l'endofonction obtenue en orientant les arêtes de A vers la racine. Soient $(u_0 = 0,u_1,\ldots,u_k = 1)$ cette colonne vertébrale et $u'_0 < \cdots < u'_k$ ces mêmes sommets en ordre croissant. Pour i allant de 0 à $k-1$, on remplace, dans la fibre de u_i, u_{i+1} par u'_{i+1}. Dans l'exemple, on peut représenter cette construction par le schéma suivant,

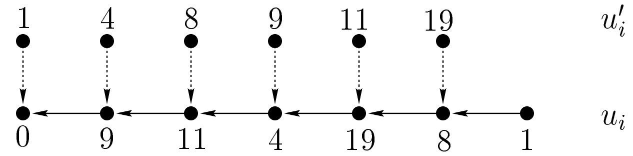


ce qui donne l'endofonction f_A suivante.



Là encore, du fait que $f_A(1) = 0$, f_A est bien une endofonction restreinte. On vérifie de plus que les cycles de f_A sont constitués des seuls éléments $u_1, \dots ,u_{k-1}$.

La construction inverse consiste elle aussi à modifier les fibres de 0, 1, et des éléments des cycles de f_A. Soient $u'_0 < \dots < u'_k$ ces éléments ($u'_0 = 0$ et $u'_1 = 1$). Pour $i = 1, \dots ,k$, on note u_i le sommet $f_A(u'_i)$. On remplace alors, dans la fibre de u_i, le sommet u'_i par u_{i+1} (u'_k par 1 dans la fibre de u_k).



On peut illustrer cette construction par le schéma précédent, qui montre qu'on transforme les cycles de f_A en un chemin commençant en 0 et se terminant en 1 et qu'on obtient ainsi une arborescence de racine 0.

5.2.3 Le cas multidimensionnel

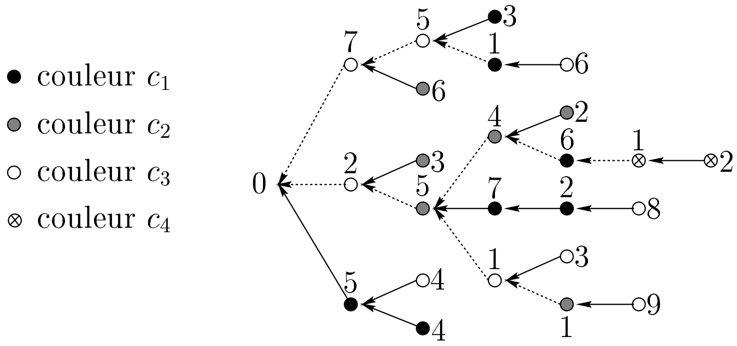
L'extension de la bijection précédente au cas multidimensionnel repose sur la notion de *squelette*, une généralisation de la notion de colonne vertébrale :

- le squelette d'une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-arborescence est constitué par l'ensemble des chemins allant de 0 à chaque sommet 1 des m couleurs ;
- le squelette d'une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonction f est constitué par l'ensemble des cycles de f et l'ensemble des chemins allant des sommets 1 de chaque couleur vers un sommet d'un cycle ou vers le sommet 0.

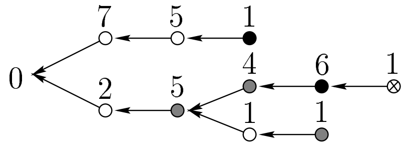
Notation. Dans la suite de cette section, on note k_i le sommet k de couleur c_i.

Transformation d'une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-arborescence en une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonction restreinte. Soit A une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-arborescence. On commence par orienter toutes ses arêtes vers la racine 0, pour obtenir une endofonction partielle non forcément restreinte. Dans la figure suivante

($m = 4$, $n_1 = 7$, $n_2 = 6$, $n_3 = 9$ et $n_4 = 2$), on a représenté en pointillés les arêtes du squelette de A.

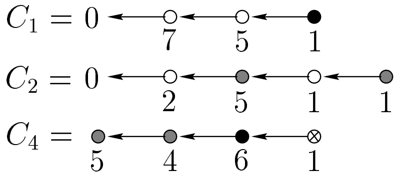


On dit alors que le sommet 1_i est *initial* si la restriction de sa fibre au squelette de A est vide.



Comme on le voit sur l'exemple, les sommets initiaux sont 1_1, 1_2 et 1_4.

La première étape de la transformation consiste à assigner un chemin C_i à chaque sommet initial 1_i : pour i allant de 1 à m, si 1_i est initial, on note C_i le chemin (dans le squelette) allant du sommet 1_i au premier de ses ancêtres appartenant déjà à un chemin C_j avec $j < i$ (ou à 0 si aucun sommet n'a déjà été obtenu). Pour l'exemple considéré, on obtient :



Remarque 100. Les C_i constituent ce que l'on pourrait appeler les branches (ou les filaments) du squelette prises relativement à l'ordre sur les couleurs.

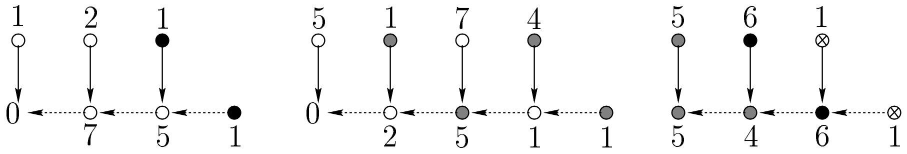
Pour chaque chemin C_i, on note f_i l'extrémité finale de C_i (l'extrémité initiale est le sommet 1_i). On vérifie alors la propriété suivante, conséquence de la définition des C_i.

(a) *Tout sommet $u \neq 0$ appartenant à plusieurs chemins C_i est l'extrémité finale de tous ces chemins excepté du premier. Le sommet* 0 *est pour sa part l'extrémité finale de tous les chemins auxquels il appartient.*

Soit P_i l'ensemble des sommets de couleur c_i appartenant au squelette de A :

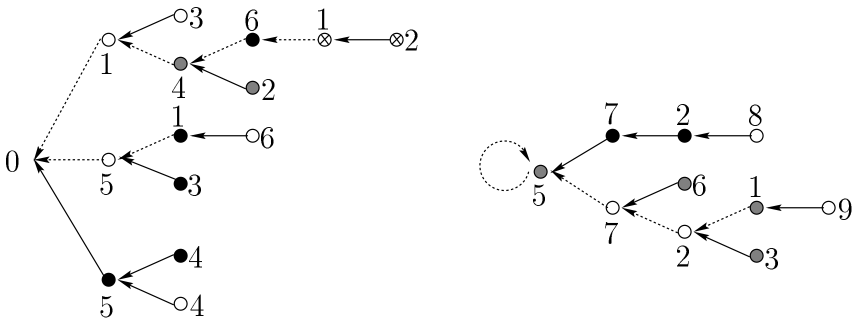
$$P_1 = \{1{,}6\},\ P_2 = \{1{,}4{,}5\},\ P_3 = \{1{,}2{,}5{,}7\},\ P_4 = \{1\}.$$

On effectue alors la transformation suivante : pour i allant de 1 à m, si 1_i est initial, poser $u = f_i$ et tant que $u \neq 1_i$, si v est le prédécesseur de u dans C_i et c_j la couleur de v, remplacer, dans la fibre de u, l'élément v par le plus petit sommet de P_j (que l'on retire de P_j) puis poser $u = v$. Cela revient à dire que l'on parcourt les C_i à contre-sens et que les préimages sont déterminées en prenant les sommets de ces couleurs en ordre croissant.



C_1 C_2 C_4

On obtient de cette manière l'endofonction f_A suivante (les arcs en pointillé sont les arcs modifiés).



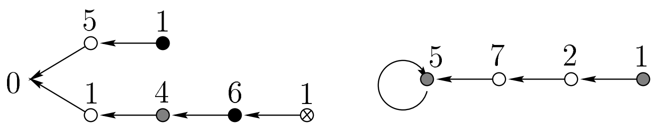
Il reste à vérifier que le graphe des couleurs de l'endofonction ainsi construite est une arborescence orientée de racine 0 dont tous les arcs sont orientés vers la racine. Cela découle du raisonnement suivant :

– si le prédécesseur u de 0 dans le premier chemin C_i suivi est de couleur c_j, alors on remplace u par 1_j dans la fibre de 0,
– lorsqu'on remplace, dans la fibre d'un sommet u de couleur c_i, le prédécesseur v de u par un sommet 1_j (v est le premier sommet de couleur c_j rencontré), cela implique que $1_i \notin P_i$ (on a retiré 1_i de P_i lorsqu'on a rencontré le premier sommet ayant un successeur de couleur c_i, qui est soit u soit un sommet rencontré avant u) et que dans le graphe des couleurs le sommet j a pour image le sommet i.

On en déduit que pour toute couleur c_i, il existe k tel que $f_A^k(1_i) = 0$, et par conséquent que le graphe des couleurs de f_A est une arborescence de racine 0 dont tous les arcs sont orientés vers la racine. De plus, on vérifie immédiatement les propriétés suivantes satisfaites par f_A.

(b) *Pour tout sommet u de f_A, u appartient au squelette de f_A si et seulement si u appartient au squelette de A.*
(c) *Le sommet 1_i est initial dans f_A si et seulement il l'est dans A.*
(d) *Pour tout élément non initial u du squelette de f_A, la restriction de la fibre de u au squelette de f_A comporte k éléments si et seulement si il existe un ensemble $\{i_1, \ldots ,i_k\} \subseteq [m]$ maximal tel que u appartient à chaque chemin C_{i_j}, pour $j = 1, \ldots ,k$.*

Pour l'exemple considéré, le squelette de l'endofonction f_A obtenue est le suivant.



Transformation d'une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonction restreinte en une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-arborescence. Soit f une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonction restreinte. En se référant à la propriété (b), pour obtenir une arborescence A_f telle que $f = f_{A_f}$, il suffit de reconstruire les chemins C_i du squelette de A_f à partir du squelette de f. Soit R le multi-ensemble comportant, pour chaque élément u, k occurrences du sommet u si et seulement si la restriction de la fibre de u au squelette de f comporte k éléments (R ne contient donc que des éléments du squelette de f). Pour l'exemple précédent, nous avons

$$R = \{0,0,6_1,4_2,5_2,5_2,1_3,2_3,5_3,7_3\}.$$

Pour $i = 1,\dots,m$, soit S_i l'ensemble des sommets de couleur c_i du squelette de f :

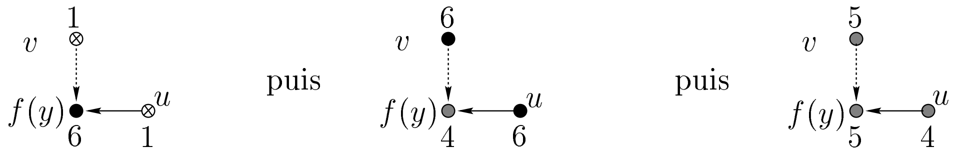
$$S_1 = \{1,6\},\ S_2 = \{1,4,5\},\ S_3 = \{1,2,5,7\},\ S_4 = \{1\}.$$

On peut maintenant construire les chemins C_i. Pour $i = m,\dots,1$, si le sommet 1_i est initial dans f, on construit C_i de la façon suivante.

---

poser $u = 1_i$;
répéter
  soit c_j la couleur de u et v le plus grand élément de $S_j(f)$;
  remplacer, dans la fibre de $f(v)$, v par u;
  retirer $f(v)$ de R et v de S_j, puis poser $u = f(v)$;
tant que $u \neq 0$ et u n'apparaît pas dans R;

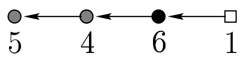
Dans notre exemple, pour $i = 4$, on effectue les opérations suivantes pour reconstruire C_4,



retirer $\bullet$6 de R — retirer $\bullet$4 de R — retirer $\bullet$5 de R

retirer $\square$1 de S_4 — retirer $\bullet$6 de S_1 — retirer $\bullet$5 de S_2

on a alors $R = \{0,0,5_2,1_3,2_3,5_3,7_3\}$ et on s'arrête car 5_2 apparaît encore dans R. On retrouve bien C_4 de cette façon.

$C_4 =$ 

Pour vérifier qu'on obtient bien une arborescence, il suffit de constater qu'on a transformé le squelette de f en une arborescence de racine 0, ce qui découle directement de la condition d'arrêt de la boucle construisant les C_i : on s'arrête lorsque l'on arrive sur 0 ou sur un élément qui sera présent dans un autre chemin car il apparaît encore dans le multi-ensemble R. Le fait que $f_{A_f} = f$ est une conséquence des propriétés (a), (b), (c) et (d).

Cette bijection vérifie de plus la propriété suivante, que nous appelons *conservation de la structure des fibres.*

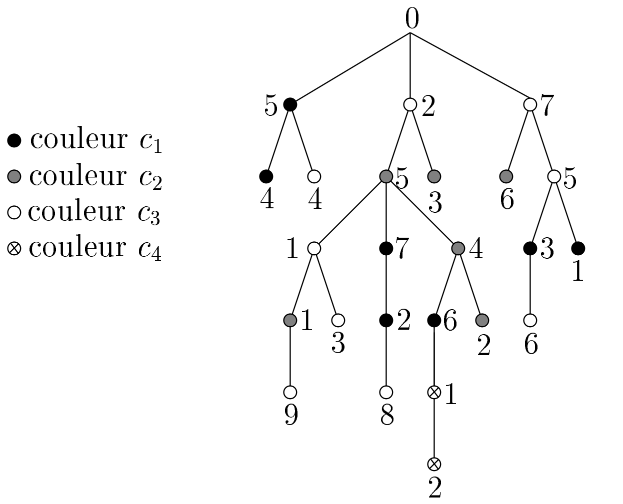
Propriété 101. Pour tout sommet u et toute couleur c_i, la fibre de u dans A comporte k éléments de couleur c_i si et seulement si la fibre de u dans f_A comporte aussi k éléments de couleur c_i.

Dans les deux dernières sections de ce chapitre, nous appliquons cette bijection entre arborescences et endofonctions restreintes à l'énumération d'arborescences et de cactus.

5.3 Arborescences dont la partition des arêtes est fixée

Dans deux articles parus au début des années 80 [95, 76], Goulden et Jackson se sont intéressés aux arborescences dont la partition des arêtes (voir définition 102 ci-dessous) est fixée, en utilisant une variante de la formule de Good dont ils ne donnent pas de preuve combinatoire. Dans cette section, nous reprenons certains de leurs résultats, notamment la variante de la formule de Good, et nous en donnons une preuve combinatoire basée sur la bijection entre arborescences et endofonctions présentée précédemment. Ces preuves illustrent le fait que, selon nous, *les endofonctions restreintes sont des structures souvent plus faciles à décrire et à compter que les arborescences*, car la structure arborescente à considérer est réduite au graphe des couleurs.

Définition 102. Soit A une arborescence à m couleurs sur $[0,\mathbf{n}]$, de racine 0. La *partition des arêtes de* A est une matrice carrée P de taille $(m+1)\times(m+1)$ $(P=(p_{i,j})_{0\leq i,j\leq m})$ telle que $p_{i,j}$ (resp. $p_{i,0}$), est égal au nombre d'arêtes reliant, dans A, un sommet u de couleur c_i à un sommet v de couleur c_j (resp. $y=0$), v étant le père de u. La partition des arêtes d'une arborescence sur $[0,\mathbf{n}]$ de racine 0 vérifie $p_{0,j}=0$ pour $1\leq j\leq m$ et $\sum_{j=0}^{m} p_{i,j}=n_i$ pour $1\leq i\leq m$.



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

FIG. 5.6 – Une arborescence et sa partition des arêtes

Remarque 103. On étend naturellement cette notion de partition des arêtes aux endofonctions en les considérant comme des graphes orientés ($p_{i,j}$ est le nombre d'arcs allant d'un sommet de couleur c_i vers un sommet de couleur c_j).

Notation. On note $\mathbf{p_j}$ le vecteur correspondant à la $j^{ème}$ colonne $(p_{0,j},p_{1,j},\ldots,p_{m,j})$ de la matrice P et $\mathbf{P}!=\prod_{i,j} p_{i,j}!$ (par convention $0!=1$).

Pour énumérer les $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-arborescences dont la partition des arêtes P est fixée il suffit d'énumérer les $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonctions restreintes de partition des arêtes P, compte-tenu de la bijection entre arborescences et endofonctions et de la propriété de conservation des fibres (propriété 101). Pour prendre en compte la contrainte sur le graphe des couleurs des endofonctions, on utilise le théorème "Matrix-Tree" pour les graphes orientés (voir [77, section 3.3.24] ou [31]).

Théorème 104. *Soit $\lambda = (\lambda_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G étiqueté à n sommets ($\lambda_{i,j}$ est le nombre d'arcs allant de i vers j). Le nombre d'arborescences couvrantes orientées de G de racine $c \in [n]$ dont tous les arcs sont orientés vers c est égal à*

$$\det\left(\left\{\delta_{i,j}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{i,k}\right\} - \lambda_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n, i\ne c, j\ne c}.$$

Pour une famille d'objets combinatoires étiquetés $\mathcal{F}$ et un entier k, on rappelle que $\mathcal{F}^k[n]$ désigne la famille des objets étiquetés sur $[n]$ constitués d'une liste ordonnée de k $\mathcal{F}$-structures. On note alors $\mathcal{H}[\mathbf{n}]$ (resp. $\mathcal{G}_i^{n_i}[\mathbf{n}]$) l'ensemble des $\mathcal{H}$-structures (resp. $\mathcal{G}_i^{n_i}$-structures) sur $[\mathbf{n}]$.

Théorème 105. *Soit P une matrice vérifiant les conditions de la définition 102 et $\delta(P)$ la matrice $(\delta_{i,j}n_i - p_{i,j})_{1\le i,j\le m}$. Le nombre de $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-arborescences sur $[\mathbf{n}]$ admettant P comme partition des arêtes est*

$$\det(\delta(P))\frac{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!}{\mathbf{P}!}\left(\prod_{i=1}^{m}|\mathcal{G}_i^{n_i}[\mathbf{p_i}]|\right)|\mathcal{H}[\mathbf{p_0}]|\,. \tag{5.10}$$

Preuve. Comme nous l'avons déjà mentionné, il suffit de montrer que le nombre de $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonctions restreintes sur $[\mathbf{n}]$ admettant P comme partition des arêtes est égal à (5.10).

On dit qu'une arborescence orientée T sur $[0,m]$ est *compatible avec* P si le fait qu'il existe dans T un arc reliant i à j, i étant le fils de j implique que $p_{i,j} \ne 0$ (une telle arborescence a donc forcément 0 pour racine, par définition de P).

Soit T une arborescence orientée compatible avec P. On cherche dans un premier temps à calculer le nombre de $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonctions restreintes f sur $[\mathbf{n}]$ admettant T comme graphe des couleurs. On remarque que si T possède un arc reliant i à j (avec i fils de j et donc $i > 0$), le nombre de façons de répartir les $n_i - 1$ éléments de couleur c_i (l'élément 1_i a pour image un élément de couleur c_j) en respectant la partition des couleurs de leurs images est

$$\binom{n_i - 1}{p_{i,0},\dots,p_{i,j-1},p_{i,j}-1,p_{i,j+1},\dots,p_{i,m}} = \frac{p_{i,j}}{n_i}\binom{n_i}{p_{i,0},\dots,p_{i,j},\dots,p_{i,m}}.$$

Pour l'élément 1_i la couleur de son image est fixée par l'arc reliant i et j dans T : c_j si $j > 0$, 0 si $j = 0$. On en déduit que le nombre d'endofonctions f admettant une arborescence T compatible avec P comme graphe des couleurs est

$$\left(\prod_{(i,j)\in T} p_{i,j}\right)\left(\prod_{i=1}^{m}\left\{\frac{1}{n_i}\binom{n_i}{p_{i,0},\dots,p_{i,m}}|\mathcal{G}_i^{n_i}[\mathbf{p_i}]|\right\}\right)|\mathcal{H}[\mathbf{p_0}]|\,. \tag{5.11}$$

Soit $\mathcal{T}_P$ l'ensemble des arborescences sur $[0,m]$ de racine 0 compatibles avec P. Le théorème 104 donne

$$\det(\delta(P)) = \sum_{T\in\mathcal{T}_P}\left(\prod_{(i,j)\in T} p_{i,j}\right),$$

ce qui, combiné à (5.11), permet de déduire que le nombre de $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonctions restreintes admettant P comme partition des arêtes est

$$\det\left(\delta(P)\right)\left(\prod_{i=1}^{m}\left\{\frac{1}{n_i}\binom{n_i}{p_{i,0},\ldots,p_{i,m}}|\mathcal{G}_i^{n_i}[\mathbf{p_i}]|\right\}\right)|\mathcal{H}[\mathbf{p_0}]|,$$

et conclut la preuve de la proposition. □

En rappelant que $|\mathcal{H}[\mathbf{p_0}]| = \mathbf{p_0}![\mathbf{x^{p_0}}]H(\mathbf{x})$ et, que pour $i = 1,\ldots,m$, $|\mathcal{G}_i^{n_i}[\mathbf{p_i}]| = \mathbf{p_i}![\mathbf{x^{p_i}}](G_i(\mathbf{x}))^{n_i}$, on a, compte-tenu du lemme 95 et de la proposition précédente, une preuve combinatoire immédiate de la variante suivante de la formule de Good, due à Goulden et Jackson [95] (voir aussi [77, section 1.2.13]).

Corollaire 106. *Soient m un entier, $\mathbf{x}$ le vecteur $(x_1,\ldots,x_m)$ de variables formelles, $H(\mathbf{x}),G_1(\mathbf{x}),\ldots,G_m(\mathbf{x})$ des séries formelles multivariées telles que $G_i(0,\ldots,0) \neq 0$ pour $i = 1,\ldots,m$. L'ensemble d'équations*

$$F_i(\mathbf{x}) = x_i G_i(F_1(\mathbf{x}),\ldots,F_m(\mathbf{x})),\ i = 1,\ldots,m$$

détermine de manière unique alors la série formelle en $\mathbf{x}$ $H(F_1,\ldots,F_m)$ par :

$$[\mathbf{x^n}]\left\{H(F_1(\mathbf{x}),\ldots,F_m(\mathbf{x}))\right\} =$$

$$\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{n_i}\right)\sum_{P}\left\{\det\left(\delta(P)\right)\left(\prod_{i=1}^{m}[\mathbf{x^{p_i}}]\left\{(G_i(\mathbf{x}))^{n_i}\right\}\right)[\mathbf{x^{p_0}}]\left\{H(\mathbf{x})\right\}\right\},$$

la somme portant sur toutes les matrices P vérifiant les conditions de la définition 102.

Pour terminer, nous nous intéressons aux arborescences de Cayley et ordonnées sur $[\mathbf{n}]$, m-coloriées, dont la racine est de couleur c_k fixée et dont la partition des arêtes P est fixée. Nous aurons besoin du résultat (immédiat) suivant.

Lemme 107. *Soient S un ensemble de k éléments indistinguables et l un entier. Le nombre de partitions de S en l parts, éventuellement vides, ordonnées entre elles, est*

$$\binom{k+l-1}{k}.$$

Des arborescences sur $[\mathbf{n}]$, on se ramène aux arborescences sur $[0,\mathbf{n}]$ considérées précédemment dans ce chapitre en ajoutant un sommet 0 devenant racine et père de l'ancienne racine de couleur c_k. Ainsi, la partition des arêtes P vérifie $p_{k,0} = 1$ et pour tout $i \neq k$, $p_{i,0} = 1$. Dans les deux corollaires qui suivent, on suppose que la matrice P vérifie ces conditions. On note $q_j = \sum_{i=1}^{m} p_{i,j}$ le nombre de sommets présents dans les fibres des sommets de couleur c_j, et on rappelle que pour tout $1 \leq i \leq m$, le nombre de sommets de couleur c_i est $n_i = \sum_{j=0}^{m} p_{i,j}$. Pour une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq l}$, on note $\mathrm{cof}_{k,k}(M)$ le déterminant de la matrice M privée de sa $k^{ème}$ ligne et de sa $k^{ème}$ colonne.

Corollaire 108. *Le nombre d'arborescences ordonnées m-coloriées sur $[\mathbf{n}]$ dont la racine est de couleur c_k et admettant P pour partition des arêtes est*

$$\mathrm{cof}_{k,k}(\delta(P))\frac{(\mathbf{n}+\mathbf{q}-\mathbf{1})!}{\mathbf{P}!},$$

Le nombre d'arborescences de Cayley m-coloriées sur $[\mathbf{n}]$ dont la racine est de couleur c_k et admettant P pour partition des arêtes est

$$\mathrm{cof}_{k,k}(\delta(P))\frac{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!}{\mathbf{P}!}\mathbf{n}^{\mathbf{q}}.$$

Preuve. Elle résulte de la preuve du théorème 105 en remarquant les points suivants.

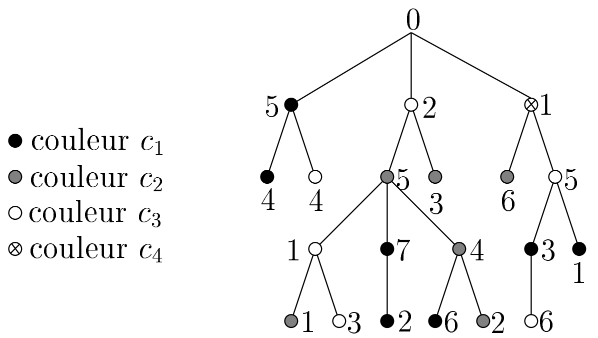
- Les arborescences A considérées (sur $[0,\mathbf{n}]$ après ajout du sommet 0) étant telles que la racine 0 a un unique fils de couleur c_k, il leur correspond des endofonctions restreintes f_A pour lesquelles $f_A(1_k) = 0$ et $f_A(1_i) \neq 0$ pour $i \neq k$ (ce constat résulte immédiatement de la construction du paragraphe 5.2.3). Il s'ensuit que le graphe des couleurs de ces endofonctions est une arborescence de racine 0 n'ayant qu'un seul fils 1_k. En utilisant cette propriété dans la preuve du théorème 105 et en appliquant le théorème 104, on en déduit que le terme $\det(\delta(P))$ de (5.10) vaut $\mathrm{cof}_{k,k}(\delta(P))$.
- Le lemme 107 nous assure que pour les arborescences ordonnées, le nombre de façons d'ordonner les q_i sommets présents dans la fibre des n_i sommets de couleur c_i (ou, de manière équivalente, le nombre de $\mathcal{L}^{n_i}$-structures sur $[\mathbf{p_i}]$) est

$$q_i!\binom{n_i+q_i-1}{q_i}.$$

  Pour les arborescences de Cayley, ce nombre (ou le nombre de $\mathcal{E}^{n_i}$-structures sur $[\mathbf{p_i}]$) est $n_i^{q_i}$ (chacun des q_i sommets se trouve dans la fibre de l'un des n_i sommets de couleur c_i). □

Nous nous intéressons maintenant aux arborescences dont la couleur de la racine et la partition des arêtes sont fixées, ainsi que la *partition des degrés*, que nous définissons ci-dessous.

Définition 109. Soit A une arborescence sur $[0,\mathbf{n}]$ de racine 0. La partition des degrés de A est une matrice $D = (d_{i,j})_{1\leq i,j}$ de taille $m \times \infty$, où $d_{i,j}$ est le nombre de sommets de couleur c_i ayant $j-1$ fils. Une telle matrice vérifie pour $1 \leq i \leq m$, $\sum_{j\geq 1} d_{i,j} = n_i$ et $q_i = \sum_{j\geq 1}(j-1)d_{i,j}$, q_i désignant le nombre total de sommets présents dans les fibres des sommets de couleur c_i.



$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

FIG. 5.7 – Une arborescence et sa partition des degrés

Corollaire 110. *Le nombre d'arborescences ordonnées m-coloriées sur $[\mathbf{n}]$, dont la racine est de couleur c_k, admettant P pour partition des arêtes et D comme partition des degrés, est*

$$\mathrm{cof}_{k,k}(\delta(P))\frac{\mathbf{q}!\mathbf{n}!(\mathbf{n}-\mathbf{1})!}{\mathbf{P}!\mathbf{D}!}.$$

Le nombre d'arborescences de Cayley m-coloriées sur $[\mathbf{n}]$, dont la racine est de couleur c_k, admettant P pour partition des arêtes et D comme partition des degrés, est

$$\mathrm{cof}_{k,k}(\delta(P))\frac{\mathbf{q}!\mathbf{n}!(\mathbf{n}-\mathbf{1})!}{\mathbf{P}!\mathbf{D}!}\left(\prod_{i,j\geq 1}\frac{1}{((j-1)!)^{d_{i,j}}}\right).$$

Preuve. La preuve de ces deux formules est similaire à la preuve du Corollaire précédent. La seule différence réside dans le fait que le nombre de façons d'ordonner les q_i éléments présents dans les fibres des sommets de couleur c_i en respectant la partition des degrés (c'est-à-dire le nombre de $\mathcal{L}^{n_i}$-structures sur $[\mathbf{p_i}]$ telles que $d_{i,j}$ sommets ont degré $j-1$) est

$$q_i!\binom{n_i}{d_{i,1},\, d_{i,2},\, d_{i,3},\ldots}.$$

La formule pour les arborescences de Cayley est une conséquence directe de la formule pour les arborescences ordonnées (en effet, le nombre de façons d'ordonner les fils d'un sommet de degré d est $d!$). □

5.4 Énumération et génération aléatoire de cactus m-aires

Nous nous intéressons maintenant aux cactus planaires. Nous montrons comment la bijection entre arborescences et endofonctions permet d'expliquer combinatoirement deux formules d'énumération relatives à ces objets, qui n'avaient pas reçu à ce jour d'explication combinatoire[1], et nous en déduisons un algorithme de génération aléatoire pour ces structures.

5.4.1 Généralités sur les cactus.

Définition 111. Un *m-cactus* est un graphe simple connexe dans lequel chaque arête appartient à exactement un cycle élémentaire de taille m. De façon équivalente, chaque composante 2-connexe d'un cactus est un cycle élémentaire à m sommets, c'est-à-dire un m-gone (un polygone à m côtés).

Dans cette section, nous nous intéressons aux m-cactus plongés dans le plan (les polygones adjacents à un sommet sont circulairement ordonnés), nommés *m-cactus planaires*, et plus particulièrement aux *cactus m-aires*.

Définition 112. Un *cactus m-aire* est un m-cactus planaire tel que les sommets autour de chaque m-gone sont coloriés successivement par les couleurs c_1,c_2,... ,c_m dans le sens trigonométrique, et dans lequel un polygone est distingué (ou de manière équivalente une arête reliant un sommet de couleur c_1 et un sommet de couleur c_2). On parle parfois de

1. Nous avons récemment appris que D. Zvonkin a obtenu une autre preuve combinatoire de ces formules [168].

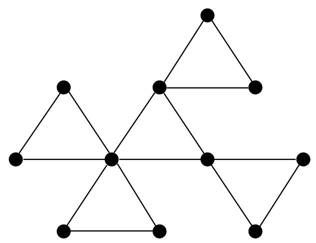


FIG. 5.8 – Un 3-cactus

cactus m-aire enraciné. Un cactus m-aire sur $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ est un cactus m-aire ayant n_i sommets de couleur i (pour $i = 1, \ldots, m$).

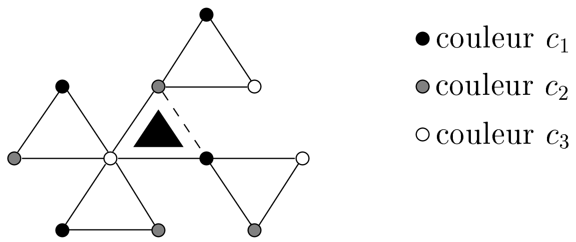


FIG. 5.9 – Un cactus ternaire

Les premières études concernant ces graphes sont dues à Harary et Uhlenbeck [89] et Harary et Palmer [88], suite à un article de Husimi [93]. Les cactus m-aires apparaissent dans plusieurs champs des mathématiques, comme par exemple la classification topologique des polynômes complexes [58, 87] ou encore les factorisations transitives minimales de permutations circulaires [78] (voir chapitre 6 de cette thèse).

5.4.2 Énumérations de cactus m-aires

Cactus, arborescences et endofonctions. Dans ce paragraphe, nous mettons en évidence la structure arborescente des cactus m-aires, ce qui, combiné à la bijection entre arborescences et endofonctions, nous permettra de mener à bien leur énumération.

Définition 113. Une arborescence *m-cactacée* sur $\mathbf{n}$ est une arborescence m-coloriée non étiquetée ayant n_i sommets de couleur c_i ($i = 1, \ldots, m$), de racine un sommet de couleur c_1, et telle que la fibre de tout sommet u de couleur c_i est structurée en une liste ordonnée de *i-blocs*, un i-bloc étant un ensemble (non ordonné donc) de $(m-1)$ sommets dont les couleurs sont les $m-1$ autres que c_i. La figure 5.10 présente une arborescence 3-cactacée.

Lemme 114. *Il existe une bijection entre les arborescences m-cactacées sur $\mathbf{n}$ et les cactus m-aires sur $\mathbf{n}$.*

Il s'agit d'un résultat classique concernant les cactus m-aires enracinés, basé sur un parcours en profondeur des polygones d'un cactus, en commençant par le polygone contenant l'arête racine (son sommet de couleur c_1 est la racine de l'arborescence créée), au cours duquel on remplace chaque polygone rencontré par un i-bloc si on est arrivé sur ce polygone par un sommet de couleur c_i. On associe ainsi un bloc à chaque polygone. La figure suivante, dans laquelle on a représenté les blocs par des rectangles et on a "fusionné" les arêtes joignant les sommets d'un bloc à leur père en une seule arête, illustre cette construction (on remarque que le polygone racine du cactus correspond au premier fils de la racine de l'arborescence).

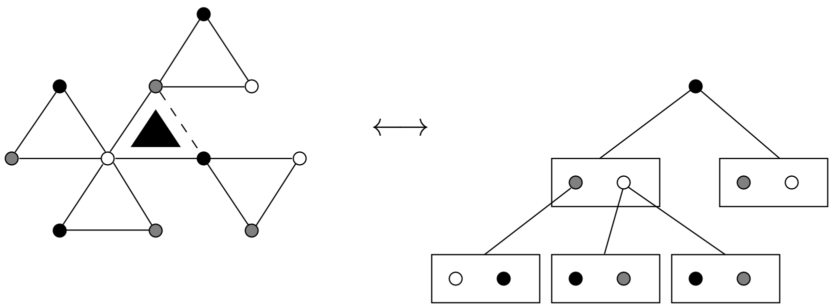


FIG. 5.10 – Cactus ternaire et arborescence 3-cactacée

On appelle degré d'un sommet dans une arborescence cactacée le nombre de blocs présents dans sa fibre, et degré d'un sommet dans un cactus le nombre de polygones auxquels ce sommet est incident. On vérifie alors immédiatement la propriété suivante.

Propriété 115. Soit C un cactus m-aire. Si u est un sommet de C autre que le sommet distingué (appartenant à l'arête racine) de couleur c_1, et u est incident à k polygones dans C ($k > 0$), alors u a degré $(k-1)$. Le sommet distingué de couleur c_1 de C et la racine de l'arborescence cactacée associée ont, pour leur part, même degré.

Pour énumérer les cactus m-aires, on se ramène donc à l'énumération des arborescences m-cactacées. Pour cela nous allons utiliser la bijection entre arborescences et endofonctions après avoir étiqueté les sommets de ces arborescences : les n_i sommets de couleur c_i d'une arborescence m-cactacée sur $\mathbf{n}$ sont étiquetés sur $[n_i]$ et on parle alors *d'arborescence m-cactacée étiquetée sur* $[\mathbf{n}]$ (ou d'arborescences m-cactacées sur $[\mathbf{n}]$).

Remarque 116. Si $a_{\mathbf{n}}$ (resp. $b_{\mathbf{n}}$) est le nombre d'arborescences m-cactacées sur $\mathbf{n}$ (resp. étiquetées sur $[\mathbf{n}]$), alors $b_{\mathbf{n}} = \mathbf{n}!a_{\mathbf{n}}$. Ainsi un algorithme engendrant aléatoirement et uniformément les arborescences m-cactacées étiquetées sur $[\mathbf{n}]$ induit un algorithme engendrant aléatoirement et uniformément les arborescences m-cactacées sur $\mathbf{n}$.

En appliquant la bijection entre arborescences et endofonctions de la section 5.2, on obtient une bijection entre arborescences cactacées étiquetées et endofonctions cactacées, dont la définition est la suivante.

Définition 117. Une endofonction *cactacée* sur $[\mathbf{n}]$ est une endofonction restreinte m-coloriée telle que la fibre de tout sommet u de couleur c_i est structurée en une liste ordonnée de *i-blocs*, la fibre de 0 comportant un seul sommet, le sommet 1 de couleur c_1.

Remarque 118. Le fait que la fibre de 0 est constituée du seul sommet 1 de couleur c_1 est une conséquence directe de la construction permettant de passer d'une arborescence à une endofonction restreinte (paragraphe 5.2.3).

Nous nous intéressons dans un premier temps au nombre de cactus m-aires ayant n_i sommets de couleur c_i, pour un vecteur $\mathbf{n}$ donné. On peut commencer par remarquer que ce vecteur doit vérifier certaines conditions.

Lemme 119. *Soient* $\mathbf{n}$ *donné et* $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$. *Il existe au moins un cactus* m*-aire sur* $\mathbf{n}$ *si et seulement si* $(n-1) = p(m-1)$ *(*p *est alors égal au nombre de polygones) et* $1 \leq n_i \leq p$, *pour* $i = 1, \ldots, m$.

Preuve. La condition est clairement nécessaire car chaque polygone comporte m sommets. Pour prouver qu'elle est suffisante, on raisonne par induction sur p. Si $p = 0$, $n = 1$ et on a le cactus à un seul sommet. Sinon, si $p = 1$, alors $n_i = 1$ pour $i = 1, \ldots, m$ et on a le cactus à un seul polygone. Sinon ($p > 1$), il existe i tel que $n_i < p$. Supposons que $n_m < p$ et définissons le vecteur $\mathbf{n}'$ par $n'_m = n_m$ et $n'_i = n_i - 1$ pour $i \neq m$. Il suffit alors de construire un m-cactus de distribution des couleurs $\mathbf{n}'$ et d'y attacher en un sommet de couleur c_m un polygone pour obtenir un m-cactus de distribution des couleur $\mathbf{n}$. $\square$

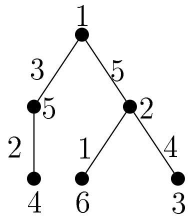
Le résultat suivant, donnant le nombre de cactus m-aires selon le nombre de sommets de chaque couleur, est dû à Goulden et Jackson [78] (voir aussi [21, 22]).

Théorème 120. *Soit* $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ *un vecteur d'entiers positifs vérifiant les conditions du lemme 119. Le nombre de cactus* m*-aires sur* $\mathbf{n}$ *est*

$$\frac{1}{p} \prod_{i=1}^{m} \binom{p}{n_i}, \tag{5.12}$$

où $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$, *et* $p = (n-1)/(m-1)$ *est le nombre de polygones.*

Preuve. Il suffit de dénombrer les endofonctions cactacées sur $[\mathbf{n}]$. Afin de prendre en compte les contraintes du graphe des couleurs de ces endofonctions restreintes, on commence par remarquer que le codage de Prüfer, présenté au chapitre 1, induit un étiquetage des arêtes d'une arborescence de Cayley : si lors de la $i^{ème}$ étape du codage (algorithme 2) on crée une arête entre les sommets u et v, on étiquette cette arête par i.

2.5.1.2.1 $\longleftrightarrow$ 

Nous réalisons l'énumération des endofonctions cactacées en trois étapes : partition des blocs, placement des éléments minimaux (éléments 1_i) et enfin placement des éléments non minimaux. On rappelle qu'une endofonction cactacée ayant n_i sommets de couleur i comporte exactement p blocs, et que la préimage de l'élément 0 est constituée du seul élément 1_1. Un i-bloc étant constitué de $m-1$ sommets de couleurs deux à deux distinctes et autres que c_i, on en déduit la propriété suivante.

(a) *Le nombre de* 1*-blocs est* $p - n_1 + 1$, *et le nombre de* i*-blocs, pour* $i > 1$, *est* $p - n_i$.

Étape 1. Partition des blocs. Elle consiste à répartir les $p - n_1 + 1$ 1-blocs en n_1 parts (les n_1 fibres des sommets de couleur c_1) et les $p - n_i$ i-blocs ($i > 1$) en n_i parts (les fibres des sommets de couleur c_i). On déduit du lemme 107 que le nombre de façons de répartir les blocs dans les endofonctions cactacées sur $[\mathbf{n}]$ est

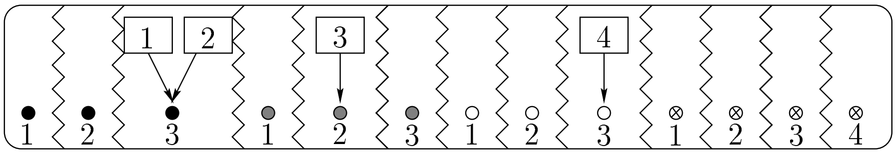
$$\binom{p}{n_1-1}\prod_{i=2}^{m}\binom{p-1}{n_i-1} = \frac{1}{(p-n_1+1)p^{m-1}}\prod_{i=1}^{m} n_i\binom{p}{n_i}. \tag{5.13}$$

Maintenant, étant donnée une partition des blocs, (on connaît, pour chaque sommet, le nombre de blocs que contient sa fibre) il nous faut déterminer le nombre de façons de répartir les sommets dans les blocs de manière à ce que la contrainte sur le graphe des couleurs d'une endofonction cactacée soit satisfaite.

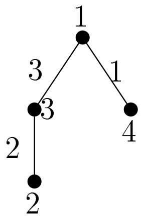
Étape 2. Placement des sommets minimaux. On considère dans un premier temps les sommets minimaux 1_i, $i = 2,\dots,m$ (1_1, le seul sommet présent dans la fibre de 0, n'appartient à aucun bloc), qui sont les sommets déterminant le graphe des couleurs de l'endofonction. Le nombre façons de placer les sommets minimaux afin que le graphe des couleurs soit une arborescence orientée de racine 0 dont tous les arcs sont orientés vers 0 est

$$p^{m-2}(p-n_1+1). \tag{5.14}$$

En effet, supposons les p blocs numérotés de manière arbitraire de 1 à p et considérons un mot w de longueur $(m-1)$ sur l'alphabet $[p]$: à toute lettre de w correspond un des p blocs de l'endofonction. À partir de w, on construit le mot w' en remplaçant chaque numéro de bloc par son type : si le bloc a dans w est un i-bloc, on remplace a par i dans w'. Ce mot w' est alors un mot de longueur $(m-1)$ sur l'alphabet $[m]$. La justification de cette construction transformant w en w' est due au fait que le graphe des couleurs est, comme son nom l'indique, seulement fonction des couleurs : ainsi, le fait que le sommet 1_j soit dans un quelconque des i-blocs se traduit par un arc unique $j \to i$ dans le graphe des couleurs. En appliquant le codage de Prüfer au mot w' tel que décrit précédemment, on obtient une arborescence sur $[m]$ dont les arêtes sont étiquetées sur $[m-1]$ (on les oriente vers la racine et on parle donc d'arcs). On peut alors associer à cette arborescence le placement suivant des éléments minimaux : si on a un arc de i vers j étiqueté k, on place le sommet 1_i dans le bloc correspondant à la $k^{ème}$ lettre de w. Ce bloc, donné par la $k^{ème}$ lettre de w ne peut être un i-bloc : en effet, l'arc d'étiquette k allant de i à j ($i \neq j$), la $k^{ème}$ lettre de w' est donc j et ce bloc est un j-bloc. Par exemple, pour $m = 4$ et $\mathbf{n} = (3,3,3,4)$, soit la partition suivante des blocs (les 4 blocs sont numérotés de 1 à 4 de gauche à droite).



Pour $w = 2.4.1$, on obtient $w' = 1.3.1$ et le codage de Prüfer appliqué à w' donne l'arborescence suivante.



On place alors le sommet 1_2 dans le bloc 4, le sommet 1_3 dans le bloc 1 et le sommet 1_4 dans le bloc 2.

Pour que la contrainte sur le graphe des couleurs soit vérifiée par ce placement des éléments minimaux, il faut et il suffit que sa racine soit le sommet 1, ce qui équivaut à imposer que la dernière lettre de w' est la lettre 1 (on obtient ainsi une arborescence de racine 1 que l'on relie à 0 par un arc joignant 1 à 0) et donc que le bloc associé à la dernière lettre de w est un 1-bloc. On a donc p choix pour chacune des $(m-2)$ premières lettres de w et $(p-n_1+1)$ pour sa dernière lettre, ce qui prouve (5.14).

Étape 3. Placement des éléments non minimaux. Une fois que les éléments minimaux sont placés, la partition des $n_i - 1$ autres sommets dans les blocs ne pose aucun problème. On déduit le résultat voulu de (5.13), (5.14) et du fait qu'il y a $(\mathbf{n}-\mathbf{1})! = \prod_{i=1}^{m}(n_i-1)!$ façons de répartir les éléments non minimaux (en tenant compte de la remarque 116). □

La *distribution des degrés* d'un cactus est une matrice $D = (d_{i,j})_{1,\leq i,j}$, de taille $m \times \infty$, où $d_{i,j}$ est le nombre de sommets de couleur i et degré j. On considère chaque ligne $(d_{i,1}, d_{i,2}, \dots)$ comme un vecteur $\mathbf{d_i}$. Par définition de D, on a $n = \sum_{i,j} d_{i,j}$ et $n_i = \sum_j d_{i,j}$, pour $i = 1, \dots, m$. Par exemple, la distribution des degrés du cactus de la figure 5.9 est donnée par la matrice

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \cdots \end{bmatrix}.$$

Théorème 121. [78, 21] *Soit $D = (d_{i,j})$ une matrice d'entiers positifs ou nuls de taille $m \times \infty$ avec $n_i = \sum_{j\geq 1} d_{i,j}$ et $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$ vérifiant les conditions du lemme 119. Le nombre de cactus m-aires sur $\mathbf{n}$ ayant D pour distribution des degrés est*

$$p^{m-1} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i} \binom{n_i}{\mathbf{d_i}}. \tag{5.15}$$

où $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$ et $p = (n-1)/(m-1)$.

Preuve. La preuve de ce résultat repose sur le même principe que la précédente, compte-tenu de la bijection entre arborescences cactacées et endofonctions cactacées. Si le degré d'un élément d'une endofonction cactacée est le nombre de blocs présents dans sa fibre, grâce à la propriété 101 de conservation de la structure des fibres et à la propriété 115, l'ensemble des cactus m-aires ayant pour partition des degrés D et une racine de degré l (le sommet de couleur c_1 du polygone racine est incident à l polygones) est en bijection avec l'ensemble des endofonctions cactacées ayant

- $d_{i,j}$ éléments de couleur c_i et de degré $j-1$ si $i > 1$ ou ($i = 1$, $j \neq l$ et $j \neq (l+1)$),
- $d_{1,l} - 1$ éléments de couleur c_1 et de degré $l-1$ et
- $d_{1,l+1} + 1$ éléments de couleur c_1 et de degré l.

Étape 1.a. Partition des i-blocs pour $i > 1$. Pour chaque couleur c_i, avec $i > 1$, le nombre de façons de répartir les i-blocs dans les fibres des n_i sommets de couleur i est

$$\binom{n_i}{d_{i,1}, d_{i,2}, \dots}.$$

On place en effet $j-1$ i-blocs dans chaque fibre de $d_{i,j}$ éléments de couleur c_i, choisis parmi n_i, et ce pour tout $j > 1$.

Étape 1.b. Partition et pointage des 1-blocs. En ce qui concerne la couleur c_1, on commence de la même manière que pour les autres couleurs : on place $j-1$ 1-blocs dans chacune des fibres de $d_{1,j}$ éléments de couleur c_1 choisis parmi n_1, pour chaque valeur de $j > 1$. On obtient alors la même expression que précédemment avec $i = 1$. Mais ici, il reste encore un 1-bloc à placer dans la fibre d'un élément de couleur c_1, bloc que l'on distingue. Comme il y a exactement $d+1$ façons de placer un bloc distingué dans la fibre d'un élément de degré d, on a donc

$$n_1 + \sum_{j\geq 1}(j-1)d_{1,j} - 1 = n_1 + (p - n_1 + 1) - 1 = p$$

façons de placer ce 1-bloc distingué dans la fibre d'un élément de couleur c_1.

On en déduit que le nombre de façons de placer l'ensemble des p-blocs et de distinguer un 1-bloc est donné par

$$p\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{d_{i,1},d_{i,2},\ldots}. \tag{5.16}$$

Étape 2. Placement des éléments minimaux. De la même manière que pour la preuve précédente, le nombre de façons de placer les éléments minimaux 1_i $(i > 1)$, en respectant la contrainte sur le graphe des couleurs, est donné, après numérotation arbitraire des blocs sur $[p]$, par le nombre de mots de longueur $(m-1)$ sur l'alphabet $[p]$ pour lesquels la dernière lettre est le numéro du 1-bloc distingué. Il y'en a donc

$$p^{m-2}. \tag{5.17}$$

Étape 3. Placement des éléments non minimaux. Finalement, comme précédemment, il y a $(\mathbf{n-1})!$ façons de placer les éléments non minimaux.

Ce dernier point, combiné à (5.16), (5.17) et à la remarque 116 donne la formule (5.15).
□

5.4.3 Génération aléatoire de cactus m-aires

Les preuves précédentes, outre le fait qu'elles donnent la première explication combinatoire, à notre connaissance, des formules d'énumération de cactus m-aires, induisent des algorithmes efficaces de génération aléatoire uniforme de cactus m-aires, selon la distribution des couleurs ou des degrés.

Pour énumérer les endofonctions cactacées selon la distribution des couleurs ou des degrés, nous avons suivi un cheminement en trois étapes qui sous-tendent les grandes lignes d'un algorithme de génération aléatoire de cactus m-aires. Pour engendrer aléatoirement et uniformément une telle structure selon la distribution des couleurs (resp. des degrés), on peut appliquer l'algorithme suivant.

Algorithme 6: Génération aléatoire de cactus m-aires

Donnée : distribution $\mathbf{n}$ (resp. D) des couleurs (resp. des degrés)
Résultat : cactus m-aire
début
génération d'une endofonction cactacée ayant distribution des couleurs $\mathbf{n}$ (resp. des degrés D) par les 3 étapes suivantes;
1. partition des blocs;
2. placement des éléments minimaux;
3. placement des éléments non minimaux;

application de la bijection entre endofonctions cactacées et arborescences cactacées étiquetées;
application de la bijection entre arborescences cactacées et cactus m-aires;
fin

Lemme 122. *L'Algorithme 6 permet d'engendrer aléatoirement et uniformément un cactus m-aire à n sommets selon la distribution des couleurs ou des degrés, en temps et espace $O(n)$.*

Preuve. Par les preuves des théorèmes 120 et 121, il est clair que cet algorithme engendre un cactus m-aire. Il reste à vérifier que cette génération est uniforme et que les complexités en temps et en espace sont linéaires.

1. Génération uniforme. Le fait que cet algorithme engendre uniformément les cactus m-aires, c'est-à-dire que tous les cactus ayant une distribution des couleurs $\mathbf{n}$ (resp. des degrés D) ont la même probabilité d'être engendrés, provient du fait que lors de l'étape de génération aléatoire d'une endofonction cactacée :

– toutes les partitions des blocs ont la même probabilité d'être engendrées,
– le nombre de façons de placer les éléments minimaux ne dépend pas de la partition des blocs (et tous ces placements sont donc équiprobables),
– le nombre de façons de placer les éléments non minimaux ne dépend ni de la partition des blocs, ni du placement des éléments minimaux (et tous ces placements sont donc équiprobables).

2. Complexité linéaire en temps et en espace. Dans les deux cas, la phase de partition des blocs consiste essentiellement à partitionner un ensemble de taille fixée de i-blocs en n_i parts, ce qui se fait en temps et espace linéaires. Le placement des éléments minimaux consiste à choisir un mot de longueur fixée sur un alphabet fixé, puis à appliquer le codage de Prüfer, ce qui là aussi se fait en temps et espace linéaires. Le placement des éléments non minimaux consiste à choisir aléatoirement une permutation sur les éléments non minimaux, ce qui se fait également en temps et espace linéaires.

La transformation d'une arborescence cactacée en un cactus s'effectuant en temps et espace linéaires par un parcours de l'arborescence, la complexité de l'algorithme est donc déterminée par la complexité de la transformation d'une endofonction cactacée en arborescence cactacée.

Supposons qu'on code les sommets s des endofonctions cactacées et des arborescences cactacées avec la même structure de donnée, comportant les informations suivantes : la couleur c et l'étiquette e du sommet s, l'adresse p de son père, un tableau F stockant sa fibre, et la position de s dans le tableau F_p de son père. La transformation se décompose en trois étapes.

- On marque tout d'abord les sommets du squelette et on calcule le degré de la restriction de leur fibre dans ce squelette, ce qui se fait en au plus deux parcours effectués en remontant le long des chemins de l'endofonction.
- Une fois les sommets du squelette marqués, en utilisant un tableau de taille n_i pour chaque couleur, on parcoure une nouvelle fois tous les sommets de l'endofonction pour construire les ensembles S_i.
- On transforme finalement le squelette en modifiant les fibres de ses éléments, ce qui ne pose pas de difficulté car chaque sommet connaît sa position dans le tableau F de son père.

Cette transformation s'effectue donc en temps et espace linéaires. □

Remarque 123. La preuve de la forme arborescente de la formule de Good due à Goulden et Kulkarni [80] a les mêmes propriétés algorithmiques que la preuve présentée ici et peut être utilisée de la même manière pour obtenir un algorithme linéaire de génération aléatoire et uniforme de cactus m-aires.

5.5 Conclusion

Nous terminons ce chapitre en présentant quelques problèmes liés à la formule de Lagrange multidimensionnelle et qui nous semblent intéressants à examiner.

Énumération d'arborescences chromatiques ordonnées. Une arborescence m-coloriée est dite *m-chromatique* si toute arête relie deux sommets de couleurs différentes.

L'énumération d'arborescences de Cayley (la fibre de chaque sommet est munie d'une $\mathcal{E}$-structure) m-chromatiques selon la distribution des couleurs est simple à mener. Le nombre d'arborescences de Cayley m-chromatiques sur $[\mathbf{n}]$ est

$$\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)^{m-1} \left(\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1,\ j\neq i}^{m} n_j\right)^{n_i-1}\right).$$

On explique aisément cette formule en termes d'endofonctions correspondant aux arborescences de Cayley m-chromatiques : le premier terme de cette expression exprime le nombre de façons de choisir les images des éléments 1_i de sorte que l'endofonction soit restreinte (par une technique utilisant le codage de Prüfer analogue à la technique employée dans l'énumération de cactus planaires), le deuxième terme exprime le nombre de façons de choisir les images des éléments non minimaux.

Dans le cas des arborescences ordonnées m-chromatiques, le problème est plus difficile. Soit $\mathcal{OC}$ la famille des arborescences ordonnées m-chromatiques. Dans le cas $m = 2$, on déduit de la propriété 101 de conservation de la structure des fibres que les endofonctions correspondant à ces arborescences sont telles que la fibre d'un sommet de couleur c_1 ne comporte que des éléments de couleur c_2 et inversement. On en déduit presque immédiatement que le nombre d'arborescences 2-chromatiques ordonnées ayant n_1 (resp. n_2) sommets de couleur c_1 (resp. c_2) est

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n_1}\frac{(n-1)!}{(n_2-1)!}\frac{(n-1)!}{(n_1-2)!} + \frac{1}{n_2}\frac{(n-1)!}{(n_1-1)!}\frac{(n-1)!}{(n_2-2)!}\right),$$

où $n = n_1 + n_2$.

Cependant, dès que $m > 2$, il devient plus difficile de décrire les endofonctions restreintes correspondant aux arborescences de $\mathcal{OC}$, et il n'existe pas, à notre connaissance, une formule d'énumération pour ces arborescences. On peut toutefois utiliser le Corollaire 108 et sommer sur toutes les partitions des arêtes. Le résultat suivant, qui est le meilleur que nous ayons pu établir pour ce problème, est basé sur ce principe, avec l'avantage d'avoir éliminé le calcul du cofacteur.

Proposition 124. *Le nombre d'arborescences ordonnées m-chromatiques sur $[\mathbf{n}]$ est*

$$\left(\prod_{i=2}^{m}(2n-i)\right)\sum_{P}\frac{(\mathbf{n}+\mathbf{q}-\mathbf{1})!}{\mathbf{P}!},$$

où la somme est sur toutes les matrices $P = (p_{i,j})_{m\times m}$ telles que $p_{i,i} = 0$, $\sum_{j=1}^{m} p_{i,j} = n_i - 1$, $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$ et $q_j = \sum_{i=1}^{m} p_{i,j}$.

Preuve. On énumère les endofonctions restreintes correspondant aux arborescences ordonnées m-chromatiques en considérant la matrice P donnant la partition des arcs excluant ceux ayant les éléments minimaux pour origine ($p_{i,j}$ est le nombre d'arcs allant d'un sommet de couleur c_i différent de 1_i à un sommet de couleur c_j). Ainsi, q_i est le nombre d'éléments non minimaux présents dans la fibre des éléments de couleur c_i. On a donc

$$\binom{n_i - 1}{p_{i,1},\ldots,p_{i,m}}$$

façons de choisir la couleur des images des éléments non minimaux de couleur c_i. On déduit du lemme 107 qu'une fois ces choix faits pour $i = 1,\ldots,m$ (chaque élément non minimal connaît la couleur de son image), on a

$$q_i!\binom{n_i + q_i - 1}{n_i - 1}$$

façons de choisir les préimages (hors éléments minimaux) des éléments de couleur c_i et de les ordonner linéairement. Il reste alors à déterminer les images des éléments minimaux de sorte que l'on ait une endofonction restreinte. On utilise le codage de Prüfer exactement de la même façon que pour l'énumération de cactus m-aires, et obtient ainsi le résultat voulu. $\square$

Dans le cas $m = 3$, cette proposition fournit la formule suivante pour le nombre d'arborescences ordonnées 3-chromatiques sur $[n_1,n_2,n_3]$ ($n = n_1 + n_2 + n_3$), certes lourde, mais programmable pour calculer les premières valeurs plus rapidement que par extraction de coefficients de séries définies par des équations lagrangiennes :

$$(2n-2)(2n-3)\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\sum_{k_3=0}^{n_3-1}\frac{(n_1+n_2-k_2+k_3-2)!}{k_1!(n_1-k_1-1)!}\times \frac{(n_2+n_3-k_3+k_1-2)!}{k_2!(n_2-k_2-1)!}\frac{(n_1+n_3-k_1+k_2-2)!}{k_3!(n_3-k_3-1)!}. \tag{5.18}$$

Cependant, lorsque m croît, ce mode de calcul devient rapidement trop lourd, en raison notamment du grand nombre de matrices P à considérer.

Le problème de déterminer (de calculer) le nombre d'arborescences ordonnées m-chromatiques ($m > 2$) selon la distribution des couleurs se pose et semble être difficile.

Formule de Lagrange multidimensionnelle et objets non étiquetés. La preuve de la formule de Lagrange multivariée que nous avons présentée, comme celle de Goulden et Kulkarni [80], est basée sur une bijection entre deux ensembles d'objets coloriés étiquetés. Comme on l'a vu, cela ne cause pas de difficulté pour la génération aléatoire de cactus m-aires car les arborescences m-cactacées sont des structures plongées dans le plan, et donc asymétriques.

On peut cependant vouloir engendrer les cactus (ou d'autres structures "lagrangiennes" coloriées) non pas aléatoirement, mais *exhaustivement*, c'est-à-dire engendrer tous les cactus ayant une distribution des couleurs (ou des degrés) donnée. Ce problème, apparaît notamment dans le cadre de la classification topologique des polynômes complexes [58, 87] et revient à engendrer exhaustivement toutes les arborescences m-cactacées de partition des couleurs (ou des degrés) donnée (lemme 114). Dans ce contexte, le fait que pour une distribution des couleurs donnée $\mathbf{n}$, il y ait $\mathbf{n}!$ fois plus d'arborescences m-cactacées sur $[\mathbf{n}]$ que d'arborescences m-cactacées non étiquetées sur $\mathbf{n}$ entraîne un surcoût prohibitif.

Dans cette optique, il serait intéressant d'avoir une preuve combinatoire de la formule de Good basée sur la manipulation d'objets non étiquetées et utilisant des séries génératrices ordinaires.

Comme nous l'avons déjà mentionné, il existe pour le cas unidimensionnel deux preuves de la formule de Lagrange manipulant des arborescences non étiquetées et dérivées de preuves "étiquetées". Elles sont dues à Chen [38, 39] et Joyal [96]. La preuve de Joyal est particulièrement intéressante car elle est basée sur le même principe que la preuve de Labelle [108] (Joyal utilise la théorie des espèces linéaires, voisine de la théorie des espèces classiques utilisée par Labelle pour sa preuve "étiquetée").

Dans le cas multidimensionnel, la seule preuve "non étiquetée" que nous connaissons est due à Chottin [42, 43], mais se limite au cas $m = 2$. Si la technique employée ne semble pas pouvoir s'étendre au delà, les objets considérés dans cette preuve fournissent cependant une piste intéressante. En effet, on déduit aisément des travaux de Chottin les points suivants.

- Le membre gauche de (5.7) est le nombre d'arborescences non étiquetées m-coloriées ayant n_i sommets de couleur c_i, ayant pour racine 0, et telles que
  - la fibre de chaque sommet (y compris la racine) est munie d'une structure d'ordre linéaire,
  - pour tout sommet de couleur c_i, aucun de ses frères gauches ne peut être de couleur c_j avec $j > i$,
  - un sommet de couleur c_i (resp. la racine 0) possédant dans sa fibre $f_1, \ldots, f_m$ fils de couleurs respectives $c_1, \ldots, c_m$ est pondéré par le coefficient de $[\mathbf{x}^{\mathbf{f}}]$ dans $F_i(\mathbf{x})$ (resp. $H(\mathbf{x})$).
- On peut interpréter le membre droit de (5.7) en termes d'*esquisse* d'une $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-endofonction restreinte. Soit f une telle endofonction : son esquisse est obtenu en "oubliant", pour chaque élément u, les étiquettes de sa fibre de $f^{-1}(u)$, pour n'en conserver que la structure (le nombre de sommets de chaque couleur) et, si la fibre de u comporte f_i éléments de couleur c_i, on pondère u par le coefficient de $[\mathbf{x}^{\mathbf{f}}]$ dans $F_i(\mathbf{x})$ si $u \neq 0$ et de $H(\mathbf{x})$) si $u = 0$.

Remarque 125. Cette présentation de la formule de Lagrange due à Chottin souligne le fait que les arborescences de Cayley sont le modèle naturel pour la formule de Lagrange dans le cadre des séries génératrices exponentielles, alors que les arborescences ordonnées semblent être le modèle naturel pour la formule de Lagrange dans le cadre des séries génératrices ordinaires.

Cela suggère une piste séduisante pour tenter établir une preuve combinatoire “non étiquetée” de la formule de Good. Si on note $\mathcal{A}_{\mathcal{G},\mathcal{H}}$ (resp. $\mathcal{S}_{\mathcal{G},\mathcal{H}}$) les arborescences ordonnées (resp. esquisse d'endofonctions) définies précédemment, il faudrait définir deux algorithmes étiquetant canoniquement les arborescences de $\mathcal{A}_{\mathcal{G},\mathcal{H}}$ et les esquisses d'endofonctions de $\mathcal{S}_{\mathcal{G},\mathcal{H}}$ (on disposerait alors de structures étiquetées permettant d'appliquer la bijection Φ entre arborescences et endofonctions). Ces algorithmes devraient être tels que pour toute arborescence A obtenue en étiquetant une arborescence de $\mathcal{A}_{\mathcal{G},\mathcal{H}}$ (resp. toute endofonction f obtenue en étiquetant une esquisse d'endofonction de $\mathcal{S}_{\mathcal{G},\mathcal{H}}$), il existe une esquisse d'endofonction de $\mathcal{S}_{\mathcal{G},\mathcal{H}}$ tel que son étiquetage donne $\Phi(A)$ (resp. il existe une arborescence de $\mathcal{A}_{\mathcal{G},\mathcal{H}}$ telle que son étiquetage donne $\Phi(f)$).

Chapitre 6

Énumération de m-constellations

Ce dernier chapitre est à nouveau consacré à l'énumération et à la génération aléatoire de structures arborescentes coloriées à l'aide de la formule de Lagrange multidimensionnelle. Plus précisément, nous nous intéressons à une famille de cartes planaires m-coloriées, appelées *m-constellations*, qui généralisent les cactus m-aires étudiés dans le chapitre précédent et apparaissent notamment lors de l'énumération des factorisations minimales transitives de permutations [87, 25, 135]. Le but de ce chapitre est de donner une formule pour le nombre de m-constellations ayant n sommets et f faces, et d'en fournir une preuve combinatoire permettant d'obtenir un algorithme de génération aléatoire pour ces cartes. Dans le cas $m = 2$, nous obtenons une nouvelle formule dénombrant les cartes biparties, différente de celle due à Walsh [163].

Ce chapitre se décompose en trois parties.

- Dans une première section, nous présentons les m-constellations et leurs duales, les cartes m-eulériennes, ainsi que leur interprétation en termes de factorisations de permutations.
- Nous poursuivons par la présentation des arborescences m-eulériennes et de l'opération de clôture, une technique introduite par Schaeffer et Bousquet-Mélou (voir [25, 135] [1]) qui établit une bijection entre arborescences m-eulériennes équilibrées et cartes m-eulériennes.
- Finalement, nous introduisons une famille d'arborescences lagrangiennes, les *arborescences constellées*, qui généralisent les arborescences cactacées introduites lors de l'énumération de cactus m-aires, et nous établissons une bijection entre arborescences m-eulériennes et arborescences constellées. Nous terminons en appliquant la formule de Lagrange multivariée, afin d'énumérer les m-constellations ayant n sommets et f faces et nous déduisons de la preuve de ce résultat un algorithme de génération aléatoire.

1. La clôture d'arborescences, non limitée aux seules arborescences eulériennes et constellations, a été introduite par Schaeffer dans sa thèse [135, 136]. Elle permet d'énumérer et d'engendrer efficacement de nombreuses familles de cartes planaires.

6.1 Constellations et cartes eulériennes

On rappelle qu'une *carte planaire* C (cf. Cori [48] par exemple) est un plongement propre d'un graphe connexe sur la sphère et vérifie la relation suivante (formule d'Euler pour les cartes planaires) :

$$s(C) + f(C) - a(C) = 2, \tag{6.1}$$

où $s(C)$ est le nombre de sommets de C, $f(C)$ le nombre de faces de C et $a(C)$ le nombre d'arêtes de C. On appelle *degré* d'une face de C le nombre d'incidences d'arêtes à C.

6.1.1 Généralités sur les constellations

Nous reprenons la définition des *m-constellations* donnée dans [135].

Définition 126. Soit $m \geq 2$. Une *m-constellation* est une carte planaire dont chaque face est coloriée en noir ou en blanc de sorte que

- les faces adjacentes à une face blanche (resp. noire) sont noires (resp. blanches),
- les faces noires (resp. blanches) sont de degré m (resp. multiple de m).

Une m-constellation est enracinée si une de ses arêtes est distinguée.

Dans la suite de ce chapitre, on considère uniquement des m-constellations enracinées (on omet donc le qualificatif enracinée) et on désigne par le terme *polygones* les faces noires. De même que pour les cactus, les sommets situés autour de chaque polygone (à m côtés) sont coloriés successivement par les couleurs $c_1, c_2, \ldots, c_m$ dans le sens trigonométrique, avec la convention que l'arête racine relie un sommet de couleur c_{m-1} à un sommet de couleur c_m. On appelle m-constellation sur $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ une m-constellation ayant n_i sommets de couleur c_i ($i = 1, \ldots, m$).

Remarque 127. Un cactus m-aire ayant p polygones est une m-constellation ayant p polygones et une seule face blanche.

Notation. Dans les figures présentant des m-constellations, on représente les polygones en grisé et l'arête racine est en pointillés.

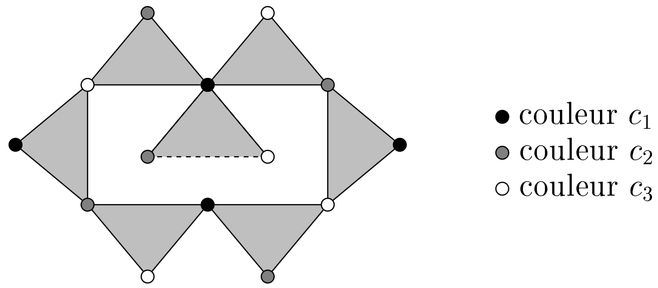


FIG. 6.1 – Une 3-constellation

Énumération de m-constellations. Dans [25, 135], Bousquet-Mélou et Schaeffer prouvent bijectivement les résultats suivants.

Théorème 128. [25, 135] *Le nombre de m-constellations C ayant d_i faces blanches de degré mi, pour $i = 1, \ldots, m$ est*

$$m(m-1)^{f-1}\frac{[(m-1)n]!}{[(m-1)n-f+2]!}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{d_i!}\binom{mi-1}{i-1}^{d_i},$$

où $n = \sum_{i=1}^{m} id_i$ est le nombre de sommets de C et $f = \sum_{i=1}^{m} d_i$ est le nombre de faces blanches de C.

Corollaire 129. [25, 135] *Le nombre de m-constellations ayant p polygones est*

$$\frac{(m+1)m^{p-1}}{[(m-1)p+2][(m-1)p+1]}\binom{pm}{p}.$$

De plus, dans [135], Schaeffer déduit de la preuve du théorème 128, basée sur la clôture d'arborescences eulériennes, un algorithme de génération aléatoire uniforme de m-constellations ayant p polygones.

Dans la suite de ce chapitre nous nous intéressons aux m-constellations distribuées suivant le nombre de sommets et le nombre de faces (blanches) et nous prouvons combinatoirement le résultat suivant.

Théorème 130. *Soient m, n, f des entiers tels que $n + f - 2 = p(m-1)$ et $1 \leq f \leq p$. Le nombre de m-constellations ayant n sommets et f faces blanches est*

$$\left(\frac{(m-1)^{f-1}}{nf}\right)\sum_{k=0}^{p-f} m^{k+1}\binom{p-k-1}{f-1}\binom{p+n-k-2}{n-1}\binom{k+f-2}{f-2}, \tag{6.2}$$

si $f > 1$ et

$$\frac{1}{(m-1)p+1}\binom{mp}{p} \tag{6.3}$$

si $f = 1$.

On déduit de la remarque 127 que le cas $f = 1$ correspond en fait à la formule dénombrant les cactus m-aires suivant le nombre de sommets (voir [22, section 4.1] par exemple).

Nous déduirons alors de la preuve de ce résultat un algorithme de génération aléatoire uniforme de m-constellations ayant n sommets et f faces.

Avant de donner la preuve du théorème 130, nous pouvons rapidement justifier les conditions imposées à m, n et f dans l'énoncé du théorème 130. Soit C une constellation ayant n sommets, f faces blanches et p polygones (C a donc $f + p$ faces et pm arêtes). Par la formule d'Euler (6.1), on a alors $n + f + p - pm = 2$, ce qui est équivalent à $n + f - 2 = p(m-1)$. De plus si on associe à chaque polygone la face blanche à laquelle est incidente son arête reliant les sommets de couleur c_1 et c_2 (par exemple), on en déduit qu'on associe chaque polygone à une seule face blanche, et on a donc bien $1 \leq f \leq p$.

Remarque 131. Une m-constellation ayant n sommets et f faces blanches (avec $(n+f-2) = p(m-1)$) a p m-gones (et donc $p + f$ faces).

Définition 132. Une m-constellation est dite *régulière* si et seulement si toutes ses faces blanches ont degré m.

Proposition 133. [25, 135] *Il existe une bijection entre les m-constellations ayant n_i sommets de couleur c_i ($1 \leq i \leq m$), et f faces blanches, et les $(m+1)$-constellations régulières ayant n_i sommets de couleur c_i ($1 \leq i \leq m$) et f sommets de couleur c_{m+1}.*

La construction reliant m-constellations et $(m+1)$-constellations régulières est la suivante. Soit C une m-constellation : on ajoute au centre de chaque face blanche de C un sommet x de couleur c_{m+1} et on transforme chaque arête adjacente à cette face reliant un sommet y de couleur c_1 et un sommet z de couleur c_m en deux arêtes reliant respectivement x à y et x à z. On obtient de cette façon une $(m+1)$-constellation régulière, l'arête distinguée étant l'arête joignant le sommet de couleur c_m distingué dans C au sommet de couleur c_{m+1} ajouté au centre de la face blanche incidente à l'arête distinguée de C. La transformation inverse est immédiate (voir figure 6.2).

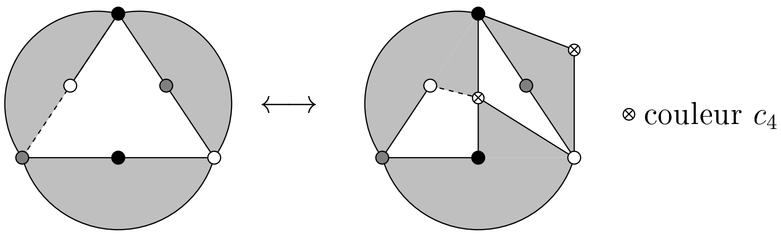


FIG. 6.2 – Bijection entre m-constellations et $(m+1)$-constellations régulières

Observation 134. Ainsi, pour énumérer (resp. engendrer) les m-constellations sur $\mathbf{n}$ ayant f faces, il suffit d'énumérer (resp. d'engendrer) les $(m+1)$-constellations régulières sur $(\mathbf{n},f) = (n_1,\ldots,n_m,f)$.

Factorisations minimales transitives de permutations. Les constellations apparaissent notamment lors de l'énumération des factorisations minimales de permutations dans le groupe symétrique, problème que nous avons abordé au chapitre 2 (section 2.3) dans le cas particulier des factorisations d'une permutation circulaire en produit de transpositions.

Définition 135. Soit σ_0 une permutation sur $[n]$. Une *factorisation minimale transitive* de σ_0 est un ensemble ordonné $(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ de m permutations sur $[n]$ telles que

- $\sigma_0 = \sigma_1 \cdots \sigma_m$ (le produit étant effectué de gauche à droite),
- le groupe engendré par $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$ agit transitivement sur $[n]$,
- $\sum_{i=0}^{m} z(\sigma_i) = n(m-1)+2$, où $z(\sigma_i)$ est le nombre de cycles de σ_i.

Par exemple, si $\sigma_1 = (1,3)(2)$, $\sigma_2 = (1,2,3)$ et $\sigma_3 = (1)(2,3)$, alors $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ est une factorisation minimale transitive de $\sigma_0 = (1)(2)(3)$.

Remarque 136. On vérifie alors que la définition 34 définit en fait les factorisations minimales transitives de *permutations circulaires* en produit de *transpositions*. De plus, l'identité (2.2) que nous avons démontrée combinatoirement au chapitre 2 apparaît dans le cadre des factorisations minimales transitives de *permutations quelconques* en produit de *transpositions* [79].

Proposition 137. [25, 135] *Soient $p \geq 1$ et $m \geq 2$. Il existe une bijection entre*
- *les m-constellations C ayant p polygones étiquetés par $\{1,\dots,p\}$ telles que le polygone incident à l'arête racine soit étiqueté par 1, et*
- *les ensembles $(\sigma_0,\dots,\sigma_m)$ de permutations sur $[p]$ tels que $(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$ est une factorisation minimale transitive de σ_0.*

De plus, si C a d_i faces (blanches) de degré $m \times i$, alors σ_0 a d_i cycles de longueur i.

Compte-tenu de la remarque 127, on déduit de ce résultat que les cactus m-aires étiquetés ayant p polygones sont en bijection avec les factorisations minimales transitives des permutations circulaires sur $[p]$.

6.1.2 Cartes m-eulériennes

Définition 138. Soit C une carte ayant s sommets, f faces et a arêtes. La *carte duale de C* est la carte C^* ayant f sommets, s faces et a arêtes telle que
- les sommets de C^* correspondent aux faces de C,
- les faces de C^* correspondent aux sommets de C,
- à toute arête e de C correspond une arête de C^* joignant les deux sommets associés aux deux faces incidentes à e.

Ainsi, la carte duale C^* de C décrit les relations d'adjacence entre les faces de C. On remarque que pour la carte duale d'une carte planaire la formule d'Euler (6.1) reste vraie que que cette carte duale est donc elle aussi planaire. Dans la figure suivante, nous avons superposé à la carte C sa carte duale en pointillés (partie gauche de la figure), avant de la redessiner sous une forme plus esthétique (partie droite de la figure).

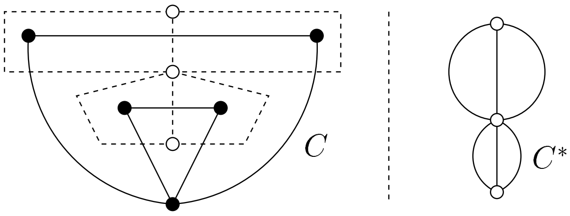


FIG. 6.3 – Deux cartes duales l'une de l'autre

Définition 139. Une *carte m-eulérienne* est une carte planaire bipartie (ses sommets sont de deux types [2], notés A et B, et toute arête relie un A-sommet à un B-sommet) telle que
- le degré de chaque A-sommet est égal à m,
- le degré de chaque B-sommet est un multiple de m.

Une carte m-eulérienne est dite *enracinée* si une de ses arêtes est distinguée.

Dans la suite de ce chapitre on ne considère que des cartes m-eulériennes enracinées, que l'on appelle donc simplement cartes m-eulériennes. La dénomination de carte m-eulérienne provient du fait que si $m = 2$, en lissant les A-sommets d'une carte m-eulérienne, on obtient une carte pour laquelle tout sommet a un degré pair, ce qui en fait une carte eulérienne [157, 134].

Notation. Dans les figures présentant des cartes m-eulériennes, on représente les A-sommets par des carrés et les B-sommets par des triangles et l'arête distinguée en pointillés.

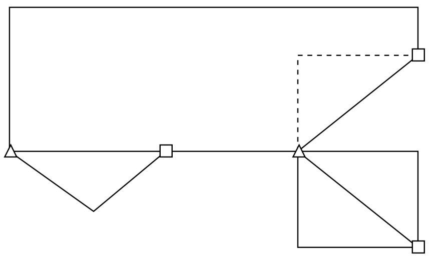


FIG. 6.4 – Une carte 3-eulérienne

On vérifie immédiatement que toute carte m-eulérienne E est la carte duale d'une m-constellation C : on fait correspondre aux polygones (resp. faces blanches) de C les A-sommets (resp. B-sommets) de E. De plus, dans le cas d'une m-constellation C sur $\mathbf{n}$, la coloration des sommets de C induit une coloration des faces de la carte m-eulérienne E. On dit alors que E est une *carte m-eulérienne sur* $\mathbf{n}$.

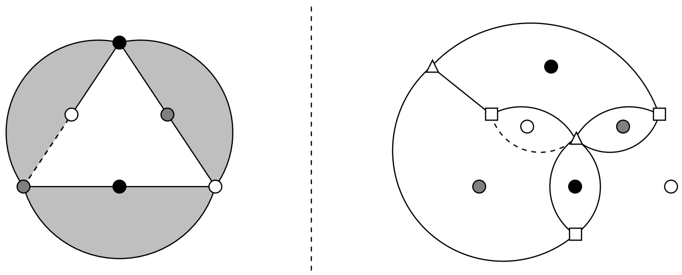


FIG. 6.5 – Une 3-constellation et la carte 3-eulérienne duale

Propriété 140. Si E est une carte m-eulérienne, l'arête racine de E sépare une face f' de couleur c_{m-1} et une face f de couleur c_m (en parcourant cette arête de son A-sommet vers son B-sommet, f est située à gauche et f' à droite).

Définition 141. Une carte m-eulérienne est dite *régulière* si tous ses sommets ont degré m.

On vérifie que la carte duale d'une m-constellation régulière est une carte m-eulérienne régulière. On a de plus la propriété suivante.

Propriété 142. Tout A-sommet (resp. B-sommet) x d'une carte m-eulérienne régulière est adjacent à exactement m faces et en tournant dans le sens trigonométrique autour de x, les couleurs des faces rencontrées sont successivement $c_1,c_2,\ldots,c_m$ (resp. $c_m,c_{m-1},\ldots,c_1$).

2. Habituellement, les sommets d'une carte bipartie sont coloriés en blanc ou en noir. Nous utilisons ici la terminologie A-sommets et B-sommets pour éviter toute confusion avec une notion de coloration que nous introduisons section 6.2.

On déduit des propriétés 140 et 142 que la coloration des faces d'une carte m-eulérienne régulière est complètement déterminée par son arête racine.

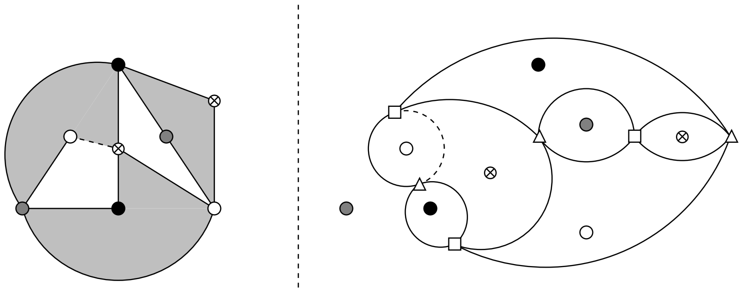


FIG. 6.6 – Une 4-constellation régulière et la carte 4-eulérienne régulière duale

Observation 143. On déduit alors de ce paragraphe et de la proposition 133 que pour énumérer (resp. engendrer) les m-constellations sur $\mathbf{n}$ ayant f faces, il suffit d'énumérer (resp. d'engendrer) les cartes $(m+1)$-eulériennes régulières sur $(\mathbf{n},f) = (n_1, \ldots, n_m, f)$.

6.2 Arborescences m-eulériennes régulières

La preuve du théorème 128 donnée dans [25, 135] est basée sur une bijection entre cartes m-eulériennes (non nécessairement régulières) et arborescences m-eulériennes. Dans cette section, nous donnons un aperçu de cette correspondance dans le cas particulier des cartes m-eulériennes régulières et des *arborescences m-eulériennes régulières.*

Arborescences m-eulériennes régulières. Une arborescence est dite *plantée* si et seulement si sa racine a un seul fils. Dans ce cas, on considère habituellement que le sommet racine est une feuille et non un nœud, et nous adoptons cette convention : une feuille d'une arborescence plantée est soit la racine soit un sommet sans fils, et un nœud est un sommet différent de la racine ayant au moins un fils.

Définition 144. Une *arborescence m-eulérienne régulière* est une arborescence plantée ordonnée non étiquetée dont les sommets peuvent être de deux sortes (A-sommets et B-sommets) telle que :

- toute arête relie un A-sommet et un B-sommet,
- sa racine est une A-feuille,
- tout nœud a $m-1$ fils,
- tout A-nœud a un et un seul B-nœud pour fils (les $m-2$ autres sont des B-feuilles).

Notation. Dans les figures présentant des arborescences m-eulériennes, on conserve la convention utilisée pour les cartes m-eulériennes, à savoir des carrés pour représenter les A-sommets et des triangles pour les B-sommets.

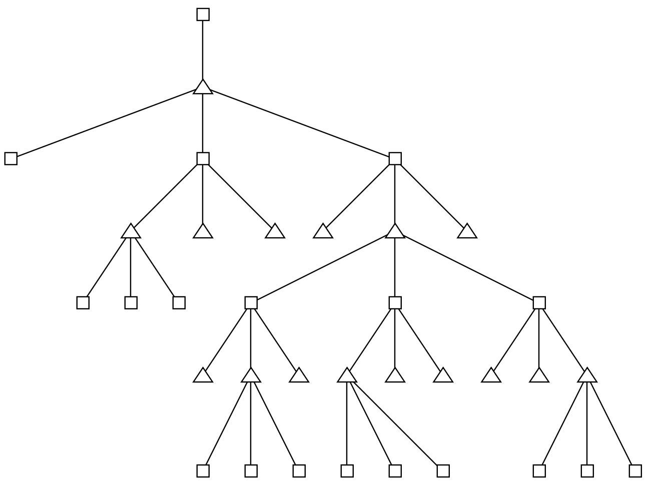


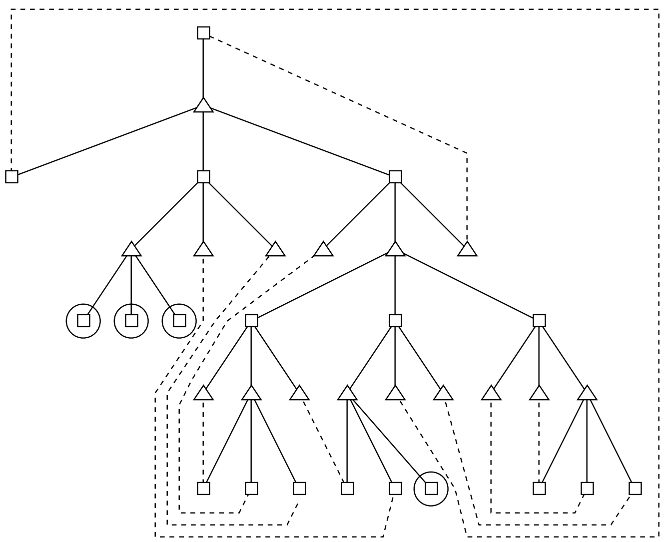
FIG. 6.7 – Une arborescence 4-eulérienne régulière

Clôture d'une arborescence m-eulérienne régulière. On rappelle que le *parcours préfixe en profondeur* d'une arborescence ordonnée T dont la racine a k fils consiste en la visite de la racine de A suivie, récursivement, du parcours des k sous-arborescences de T ayant pour racine les fils de r. On définit alors l'opération de *clôture* d'une arborescence m-eulérienne de la manière suivante.

Algorithme 7: *Clôture d'une arborescence m-eulérienne*

Donnée : T : arborescence m-eulérienne régulière
Résultat : $C(T)$: carte planaire
début
  soient P une pile vide et $C(T) := T$;
  pour tout sommet x visité lors du parcours préfixe en profondeur de T **faire**
    si x est une B-feuille **alors** empiler x;
    si x est une A-feuille et P est non vide **alors**
      soit y le sommet de la pile P que l'on dépile;
      relier x et y par une arête que l'on ajoute à $C(T)$ (les feuilles x et y sont dites appariées);
  tant que P est non vide **faire**
    soit y le sommet de la pile P que l'on dépile;
    relier la première (relativement au parcours préfixe en profondeur) A-feuille x non encore appariée à y par une arête que l'on ajoute à $C(T)$;
fin

La figure suivante donne un exemple d'exécution de cet algorithme (les arêtes ajoutées sont représentées en pointillés).



Définition 145. Une A-feuille x d'une arborescence m-eulérienne est dite *libre* si et seulement si, à l'issue de sa clôture, x n'est reliée (appariée) à aucune B-feuille.

Sur la figure précédente, les A-feuilles libres sont entourées d'une cercle. On vérifie la propriété suivante, conséquence de la définition des arborescences m-eulériennes et de l'opération de clôture d'une arborescence m-eulérienne (voir [25, 135]).

Propriété 146. Une arborescence m-eulérienne régulière T a exactement m A-feuilles libres, toutes situées sur la même face de $C(T)$.

Définition 147. Une arborescence m-eulérienne régulière est dite *équilibrée* si et seulement si sa racine est une A-feuille libre.

Proposition 148. [25, 135] *Il existe une bijection entre les arborescences m-eulériennes régulières équilibrées ayant k A-nœuds et l B-nœuds et les cartes m-eulériennes régulières ayant $k+1$ A-sommets et l B-sommets.*

Cette correspondance est basé sur la construction suivante. Soient T une arborescence m-eulérienne régulière équilibrée et $C(T)$ la carte planaire obtenue par clôture de T. Dans un premier temps, on ajoute dans la face de $C(T)$ contenant les m A-feuilles libres un A-nœud relié à m B-feuilles (cet ensemble de sommets est appelé une *étoile*) et on apparie ces B-feuilles avec les m A-feuilles libres, dans un ordre circulaire de sorte que les arêtes ainsi créées ne se croisent pas. On obtient ainsi une carte planaire notée $C'(T)$. Dans un second temps, pour chaque paire (x,y) de feuilles appariées, on remplace les trois arêtes (u,x), (x,y) et (v,y) par une arête (u,v) (u et v étaient les pères respectifs de x et y dans l'arborescence T ou l'étoile). Pour terminer, on distingue l'arête reliant le A-sommet ajouté au fils de la racine de T et passant par la racine. On obtient ainsi une carte m-eulérienne régulière E.

Propriété 149.

1. Les A-sommets de E (et donc les polygones de la m-constellation régulière duale de E) correspondent aux A-nœuds de T et au A-nœud de l'étoile (ce dernier correspondant au polygone contenant l'arête racine).

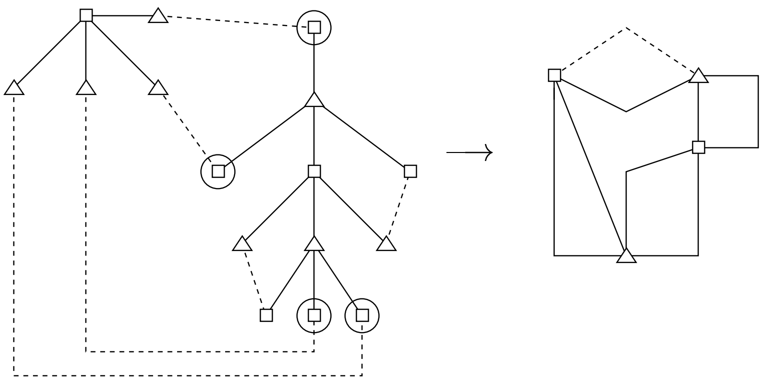


FIG. 6.8 – Clôture puis transformation d'une arborescence 4-eulérienne régulière équilibrée en une carte 4-eulérienne régulière

2. Les B-sommets de E (et donc les faces blanches de la m-constellation régulière duale de E) correspondent aux B-nœuds de T.

On remarque que pour toute face f de $C'(T)$, il existe une et une seule arête (x,y) la bordant où x est une A-feuille et y est une B-feuille et telle que son parcours de x vers y laisse la face f à main droite : on dit dans ce cas que la A-feuille x ferme la face f. On en déduit la propriété suivante.

Propriété 150. Soient T une arborescence m-eulérienne régulière équilibrée et E la carte m-eulérienne régulière régulière lui correspondant. La fermeture des faces de E par les A-feuilles de T induit une correspondance entre faces de la carte E et A-feuilles de l'arborescence T.

La construction inverse est plus complexe à décrire et, comme elle ne nous est pas utile par la suite, nous renvoyons le lecteur intéressé aux travaux [25, 135].

Coloration d'une arborescence m-eulérienne régulière. Dans ce paragraphe, nous décrivons un algorithme affectant une couleur de $\{c_1,\dots,c_m\}$ à chaque sommet d'une arborescence m-eulérienne régulière (non nécessairement équilibrée) de sorte que, dans le cas d'une arborescence équilibrée, la couleur d'une A-feuille est la couleur de la face fermée par cette A-feuille dans la carte m-eulérienne régulière lui correspondant. Nous en déduisons que l'énumération (resp. la génération) des cartes m-eulériennes régulières ayant n_i faces de couleur c_i (pour $i = 1,\dots,m$) se ramène à l'énumération (resp. la génération) des arborescences m-eulériennes régulières (non nécessairement équilibrées) ayant n_i A-feuilles de couleur c_i.

Soit T une arborescence m-eulérienne régulière. On colorie les sommets de T de la manière suivante (la figure 6.9 présente un exemple de cette construction) :
- la racine r et son fils sont coloriés par la couleur c_m,
- si un A-sommet (resp. B-sommet) x autre que la racine est colorié par la couleur c_i, ses $m-1$ fils sont successivement coloriés de gauche à droite (resp. droite à gauche) par les couleurs $c_{i+1},\dots,c_m,c_1,c_{i-1}$.

Une arborescence m-eulérienne régulière sur $\mathbf{n}$ est une arborescence ayant n_i A-feuilles de couleur c_i.

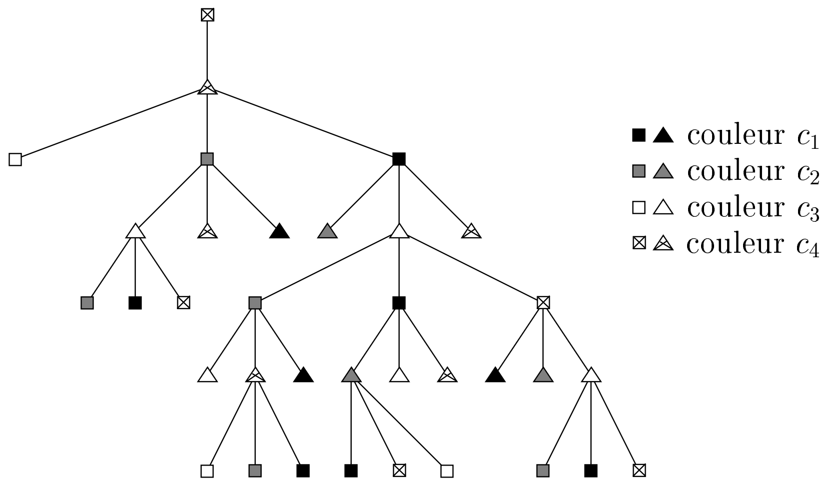
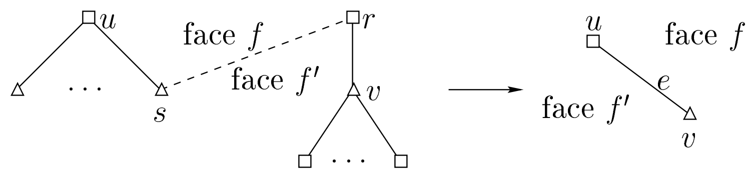


FIG. 6.9 – Coloration d'une arborescence 4-eulérienne régulière

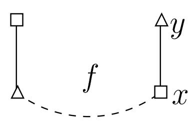
Lemme 151. *Soit E une carte m-eulérienne régulière et T l'arborescence m-eulérienne régulière équilibrée correspondante, coloriée par l'algorithme défini ci-dessus. Pour chaque face f de E, la couleur de la A-feuille de T fermant f est la couleur de f.*

Preuve. Considérons tout d'abord la A-feuille r racine de T. Après clôture de T et ajout de l'étoile (dont on note u le A-nœud), l'arête e racine de E est l'arête joignant le A-nœud u au fils v de la racine de T (voir figure ci-après).



La A-feuille r ferme la face distinguée notée f sur la figure (située à droite lorsque l'on parcourt l'arête de la A-feuille r vers s), cette face f étant située à gauche de l'arête e dans E lorsque cette arête est parcourue du A-sommet u vers le B-sommet v. La propriété 140 nous assure que cette face f est coloriée par c_m, ce qui justifie le choix de la couleur c_m pour la A-feuille racine de T effectuée dans l'algorithme de coloration.

Considérons maintenant une A-feuille x de T autre que la racine r et soient y le B-nœud père de x et f la face de $C'(T)$ fermée par x (voir figure ci-après).



La face f fermée par la A-feuille x est la face située à main gauche lorsque l'on remonte l'arête (x,y) de x vers y. Compte-tenu de la définition de l'algorithme de coloriage de T, conséquence directe de la propriété 142 et du fait que les A et B-nœuds de T correspondent aux A et B-sommets de E, il est clair que f et x ont même couleur puisqu'il en est ainsi pour la A-feuille racine de T et la face distinguée de E. □

Soit T une arborescence m-eulérienne régulière de racine r. On dit qu'on "repique" T en une de ses feuilles x si on plante T en x (x devient la racine) de la façon suivante : si le parcours préfixe en profondeur de T visite les sommets dans l'ordre $x_0 = r, x_1, \ldots, x_i = x, \ldots, x_n$, alors ce même parcours sur l'arborescence T repiquée en x visite les sommets dans l'ordre $x_i = x, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_0 = r, x_1, \ldots, x_{i-1}$.

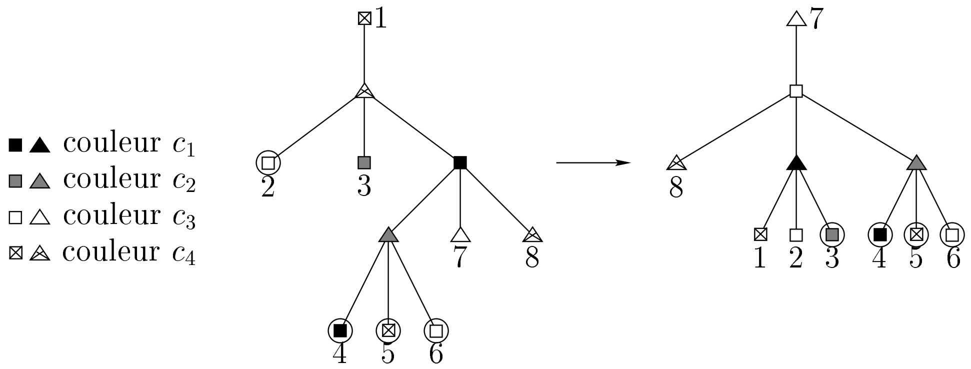


FIG. 6.10 – Repiquage d'une arborescence 4-eulérienne régulière en la B-feuille 7, conservation des A-feuilles libres (entourées d'un cercle) et des couleurs des feuilles

Compte-tenu des principes des algorithmes de clôture et de coloration, on obtient la propriété suivante.

Lemme 152. *Repiquer une arborescence m-eulérienne régulière de racine r en une feuille x ne modifie*

1. *ni les appariements de feuilles,*
2. *ni la coloration de ses feuilles (en coloriant bien sûr x à l'identique à l'initialisation de l'algorithme).*

Preuve. Le premier point est immédiat, le repiquage conservant l'ordre préfixe des feuilles et les appariements de feuilles étant obtenus par un parcours préfixe en profondeur de l'arborescence.

Pour le second point, supposons que la couleur d'une arête (x,y) de l'arborescence soit donnée par la couleur du sommet y fils de x. Ainsi, l'algorithme de coloration est tel que, lorsque l'on tourne autour d'un A-sommet (resp. B-sommet) dans le sens trigonométrique positif (resp. négatif), les arêtes sont coloriées $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Le repiquage d'une arborescence ne modifie évidemment pas cette coloration des arêtes de l'arborescence et donc celle des feuilles (il n'en est pas exactement de même pour les nœuds). □

Il s'ensuit le résultat suivant.

Lemme 153. *Soit T une arborescence m-eulérienne régulière (non nécessairement équilibrée) coloriée par l'algorithme décrit précédemment. Pour tout $i = 1, \ldots, m$, il existe une et une seule A-feuille libre de T de couleur c_i.*

Preuve. Lors de la construction de la carte m-eulérienne régulière associée à l'arborescence T, chacune des faces incidentes au A-nœud de l'étoile est fermée par une A-feuille libre de T. Compte-tenu du lemme 151 et de la propriété 142, le résultat est donc vrai si T est équilibrée.

Supposons que T ne soit pas équilibrée. Soient x une feuille libre de T et T' l'arborescence obtenue en repiquant T en x. On déduit du lemme 152 que que T' est équilibrée, que ses A-feuilles libres sont celles de T et que leurs couleurs sont inchangées. T'

étant équilibrée, ses A-feuilles libres sont coloriées $c_1,c_2,\dots,c_m$ d'après le raisonnement précédent. Ceci conclut la preuve du lemme. □

Lemme 154. *Si $a_{\mathbf{n}}$ est le nombre d'arborescences m-régulières sur $\mathbf{n}$ et b_n le nombre d'entre elles équilibrées, alors*

$$a_{\mathbf{n}} = n_m \times b_{\mathbf{n}}.$$

Preuve. Soit T une arborescence m-eulérienne régulière sur $\mathbf{n}$. On note $F(T)$ l'ensemble des arborescences obtenues en repiquant T en une des ses A-feuilles de couleur c_m [3]. On constate alors que

- $F(T)$ comporte exactement n_m arborescences (les appariements des feuilles étant conservés, on ne peut avoir deux arborescences identiques de cette façon),
- toutes les arborescences de $F(T)$ sont des arborescences sur $\mathbf{n}$ (lemme 152),
- seule l'arborescence de $F(T)$ repiquée en la A-feuille libre de couleur c_m (le lemme 153 assure qu'une telle A-feuille existe) est équilibrée,
- T appartient à $F(T)$ et pour toute arborescence T' de $F(T)$, $F(T') = F(T)$.

Le résultat découle de ces points. □

Observation 155. On déduit ainsi de l'observation 134 et des lemmes 154 et 151 que pour énumérer (resp. engendrer) les m-constellations sur $\mathbf{n}$ ayant f faces blanches, il suffit d'énumérer (resp. engendrer) les arborescences $(m+1)$-eulériennes régulières (non nécessairement équilibrées) dont les A-feuilles sont coloriées sur $(\mathbf{n},f)$.

6.3 Énumération et génération aléatoire de constellations

Dans cette dernière section, nous commençons par montrer que les arborescences m-eulériennes régulières sont en bijection avec une famille d'arborescences qui généralisent les arborescences cactacées et que nous appelons *arborescences m-constellées*. On en déduit que l'énumération de m-constellations se ramène à l'énumération d'arborescences $(m+1)$-constellées. Cela ne nous a malheureusement pas donné la possibilité d'établir une formule satisfaisante résolvant le problème général, à savoir l'énumération suivant la distribution des couleurs des sommets et le nombre de faces blanches. Toutefois, cette construction reliant arborescences eulériennes régulières et arborescences constellées nous a permis de résoudre une version simplifiée du problème, l'énumération et la génération de constellations suivant le nombre n de sommets et le nombre f de faces blanches.

6.3.1 Arborescences constellées

Définition 156. Une arborescence *m-constellée* sur $\mathbf{n}$ est une arborescence non étiquetée m-coloriée sur $\mathbf{n}$ (ayant donc n_i sommets de couleur c_i, pour $i = 1,\dots,m$), de racine de couleur c_m, telle que

- la fibre de la racine comporte $m-1$ fils, de couleurs respectives $c_{m-1},\dots,c_1$, ainsi ordonnés de gauche à droite par couleur décroissante,

3. Cette opération consistant à repiquer une arborescence, après sa clôture, en une de ses feuilles libres est à la base de la *conjugaison d'arborescences*, introduite par Schaeffer [135]. Pour une arborescence T, on peut en effet considérer l'ensembles $F(T)$ comme une classe de conjugaison d'arborescences.

– la fibre de tout sommet x de couleur c_i est structurée en une liste ordonnée de (i,j)-*blocs*, avec $i \neq j$, un (i,j)-bloc étant un ensemble (non ordonné) de $(m-2)$ sommets de couleurs deux à deux distinctes et autres que c_i et c_j.

Dans les figures, on représente les blocs par des rectangles et on “fusionne” les arêtes joignant les sommets d'un bloc à leur père en une seule arête.

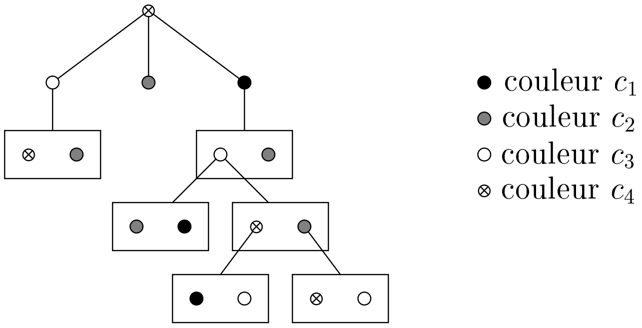
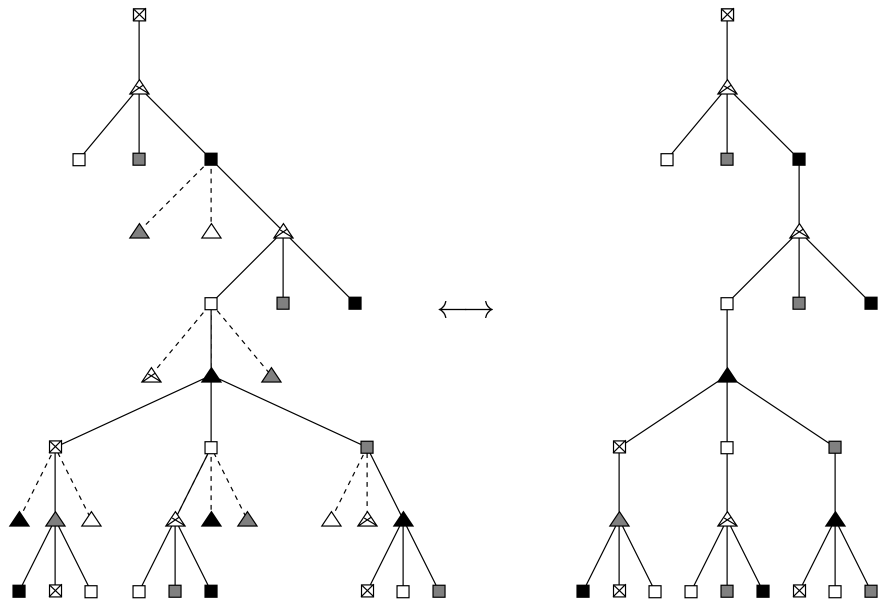


FIG. 6.11 – Une arborescence 4-constellée

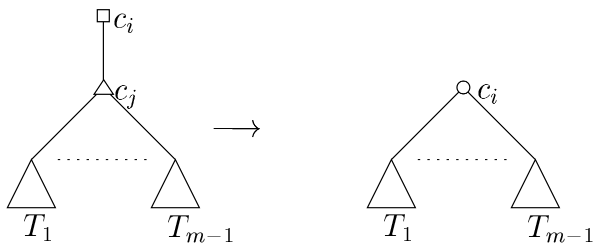
Proposition 157. *Il existe une bijection entre les arborescences m-eulériennes régulières dont les A-feuilles sont coloriées sur* $\mathbf{n}$ *et les arborescences m-constellées sur* $\mathbf{n}$.

Preuve. Le principe de cette bijection consiste à supprimer peu à peu tous les nœuds et toutes les B-feuilles d'une arborescence m-eulérienne régulière. La construction se compose de 3 étapes. Soit T une arborescence m-eulérienne régulière aux A-feuilles coloriées sur $\mathbf{n}$ (on a n_i A-feuilles de couleur c_i, pour $i = 1, \ldots, m$).

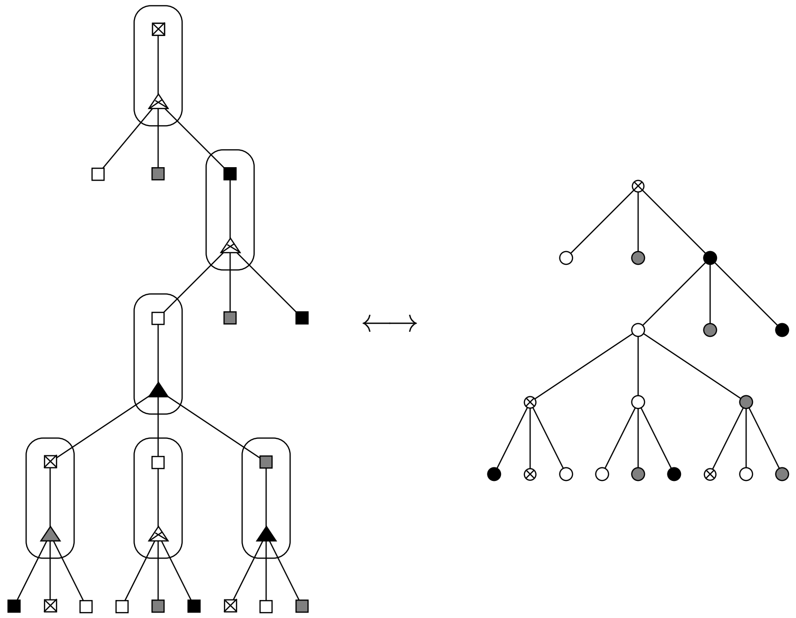
Étape 1. Suppression des B-feuilles. On construit une arborescence T_1 à partir de T en supprimant toutes les B-feuilles de T. Comme la fibre de tout A-nœud de T comporte exactement un B-nœud (définition 144), la fibre de tout A-nœud (ainsi que celle de la racine) de T_1 est donc réduite à un B-nœud. La construction inverse, donnant T à partir de T_1 est immédiate, la position et les couleurs des B-feuilles à ajouter à la fibre d'un A-nœud x de T_1 se déduisant de la couleur de x, de la couleur du B-nœud fils de x et de l'algorithme de coloration d'une arborescence m-eulérienne régulière.



Étape 2. Suppression des B-nœuds. Chaque B-nœud x, situé dans la fibre d'un A-sommet y (x est donc le seul fils de y) est supprimé et sa fibre est greffée à son père y qui conserve sa couleur. On obtient ainsi une arborescence T_2 ne comportant que des A-sommets (on parle alors simplement de sommets, nœuds et feuilles, que l'on représente par des cercles). L'arborescence T_2 n'étant plus plantée, on considère sa racine comme un nœud et non plus comme une feuille.



L'arborescence de notre exemple devient :

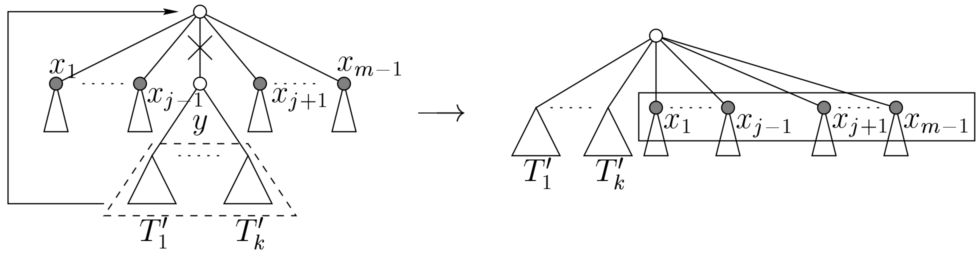


L'arborescence T_2 vérifie alors les propriétés suivantes, conséquences de l'algorithme de coloriage.

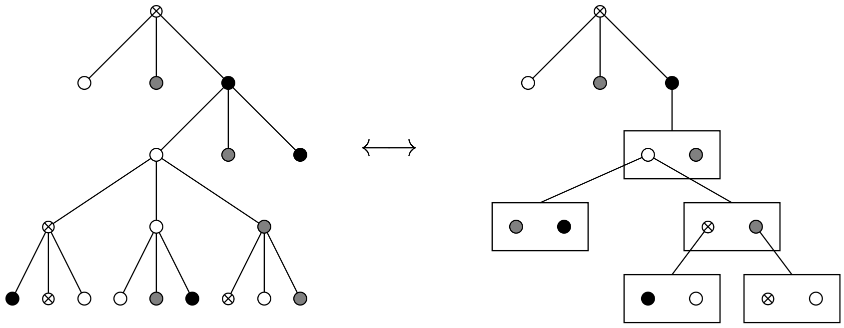
- La racine r est de couleur c_m et sa fibre est composée de $m-1$ sommets de couleurs $c_{m-1},\dots,c_1$, ainsi ordonnés de gauche à droite par couleur décroissante.
- Tout nœud $x \neq r$ de couleur c_i, a sa fibre composée de $m-1$ sommets de couleurs deux à deux distinctes, $c_k,c_{k-1},\dots,c_1,c_m,c_{m-1},\dots,c_{k+2}$ ainsi ordonnés de gauche à droite par couleur décroissante, une couleur autre que c_i étant absente (ainsi x de couleur c_i possède un fils de couleur c_i).
- L'arborescence T_2 a n_i feuilles de couleur c_i, pour $i = 1,\dots,m-1$, et $n_m - 1$ feuilles de couleur c_m.

La construction inverse consiste à "dilater" tout nœud x de couleur c_i en une arête reliant x à un B-nœud y, à greffer la fibre de x sous y et à donner à y la couleur qui n'apparaissait pas dans la fibre de x.

Étape 3. Suppression des nœuds de T_2. Soient x de couleur c_i un nœud de T_2 autre que la racine, y le fils de x de même couleur c_i et c_j la couleur non présente dans la fibre de x. On supprime alors y en greffant sa fibre à gauche des autres fils de x qui, privés de y forment un (i,j)-bloc. En répétant cette opération pour chaque nœud de T_2, on obtient ainsi une arborescence m-constellée T' sur $\mathbf{n}$.



Pour reconstruire T_2 à partir de A', il convient de parcourir les sommets de T' en ordre préfixe (parcours en profondeur). Pour chaque nœud x (de couleur c_i) autre que la racine, il suffit de supprimer de sa fibre tous les blocs à l'exception du dernier (situé le plus à droite), d'ajouter un sommet y de couleur c_i à la fibre de x et de transférer les blocs supprimés de la fibre de x à celle de y.



Ceci termine la preuve de la proposition. □

La propriété suivante est une conséquence immédiate de la construction précédente. On la vérifie en suivant les étapes une à une.

Propriété 158. Soit k le nombre de blocs d'une arborescence m-constellée sur $\mathbf{n}$. L'arborescence m-eulérienne régulière coloriée sur $\mathbf{n}$ lui correspondant a alors $k+1$ B-nœuds.

La proposition précédente peut être considérée comme une généralisation du lemme 114, reliant cactus m-aires et arborescences m-cactacées. En effet, un cactus m-aire étant une m-constellation comportant une seule face blanche (remarque 127), il lui correspond une arborescence $(m+1)$-eulérienne régulière ayant exactement une A-feuille de couleur c_{m+1}. On déduit du lemme 153 que toute arborescence $(m+1)$-eulérienne régulière ayant une seule A-feuille de couleur c_{m+1} est équilibrée (cette unique A-feuille de couleur c_{m+1} étant libre et constitue donc la racine). Ainsi, compte-tenu de la proposition précédente, les cactus m-aires sont en bijection avec les arborescences $(m+1)$-constellées ayant un et un seul sommet de couleur c_{m+1}, qui par définition est la racine. Or, si T est une arborescence $(m+1)$-constellée sur $(\mathbf{n},1)$ (comportant donc exactement un sommet de couleur c_{m+1}, qui est sa racine), tous ses blocs sont nécessairement des $(i,m+1)$-blocs. Considérons alors le fils x de la racine de couleur c_1. En regroupant les $m-1$ autres fils de la racine (différents de x), on constitue un $(1,m+1)$-bloc. En transférant ce bloc dans la fibre de x, à droite de tous les blocs déjà présents dans cette fibre, et en supprimant le sommet racine, on obtient alors une arborescence m-cactacée sur $\mathbf{n}$.

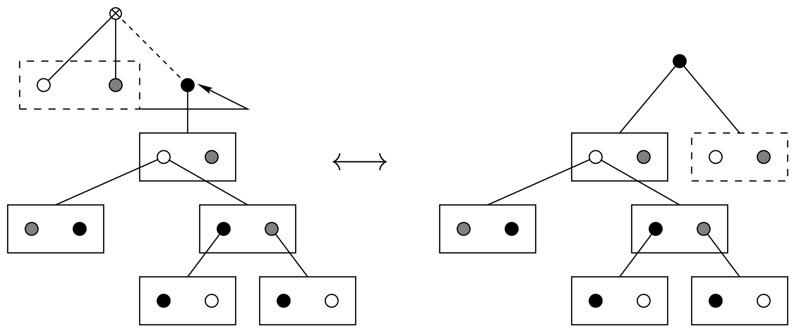


FIG. 6.12 – Une arborescence 4-constellée ayant un sommet de couleur c_4 et l'arborescence 3-cactacée correspondante

On peut cependant remarquer que pour un cactus m-aire donné, l'arborescence m-cactacée obtenue en appliquant la construction du lemme 114 n'est en général pas la même que l'arborescence m-cactacée obtenue en appliquant la construction précédente.

6.3.2 Énumération et génération aléatoire de m-constellations

Tous les éléments étant maintenant réunis, nous pouvons aborder le problème de l'énumération des m-constellations suivant le nombre de sommets et le nombre de faces. Plus précisément, nous allons démontrer le résultat énoncé lors de la présentation des constellations (théorème 130) et que nous rappelons ici.

Soient m, n et f des entiers tels que $n+f-2=p(m-1)$ et $1 \leq f \leq p$. Le nombre de m-constellations ayant n sommets et f faces blanches est

$$\left(\frac{(m-1)^{f-1}}{nf}\right)\sum_{k=0}^{p-f} m^{k+1}\binom{p-k-1}{f-1}\binom{p+n-k-2}{n-1}\binom{k+f-2}{f-2},$$

si $f>1$ et

$$\frac{1}{(m-1)p+1}\binom{pm}{p}$$

si $f=1$.

Nous allons donner une preuve combinatoire de cette formule, faisant intervenir la preuve combinatoire de la formule de Lagrange multidimensionnelle. Nous en déduirons un algorithme de génération aléatoire de m-constellations ayant un nombre de sommets et de faces blanches fixés.

6.3.2.1 Énumération de constellations

On déduit

- de la correspondance entre m-constellations et $(m+1)$-constellations régulières (proposition 133),
- de la correspondance entre m-constellations régulières et cartes m-eulériennes régulières (dualité, observation 143),
- de la correspondance entre cartes m-eulériennes régulières et arborescences m-eulériennes régulières équilibrées (proposition 148) et de la relation entre leurs colorations (lemme 151)
- du lemme 154 exprimant le nombre d'arborescences m-eulériennes régulières équilibrées en fonction du nombre d'arborescences m-eulériennes régulières,
- de la correspondance entre arborescences m-eulériennes régulières et arborescences m-constellées (proposition 157),

que, si $a_{n,f}$ est le nombre d'arborescences $(m+1)$-constellées sur $(\mathbf{n},f)$, le nombre de m-constellations ayant m sommets et f faces blanches est

$$\frac{a_{n,f}}{f}. \tag{6.4}$$

Pour énumérer les arborescences m-constellées selon les deux seuls paramètres n et f, nous introduisons une famille d'arborescences bicoloriées qui constituent une restriction des arborescences constellées. Nous les appelons *squelettes d'arborescences m-constellées*, ou de manière plus concise *m-squelettes.*

Définition 159. Soit $l \geq 3$. Un l-squelette est une arborescence non étiquetée dont les sommets sont de deux types (A-sommets et B-sommets) telle que

- la racine est un B-sommet, dont la fibre, qui comporte $l-1$ A-sommets, est munie d'une structure de liste ordonnée,
- la fibre de tout A-sommet est structurée en une liste ordonnée de *A-blocs* et de *B-blocs*, un A-bloc (resp. B-bloc) étant une liste ordonnée de $(l-2)$ A-sommets (resp. $(l-3)$ A-sommets et 1 B-sommet, qui est alors le dernier élément du bloc),
- la fibre de tout B-sommet est structurée en une liste ordonnée de A-blocs (un B-sommet n'a pas de B-sommet dans sa fibre).

Dans les figures, comme précédemment, nous représentons les A-sommets par des carrés, les B-sommets par des triangles et nous identifions toutes les arêtes joignant les sommets d'un bloc à son père en une seule (une arête d'un l-squelette relie donc un sommet à un bloc de sa fibre). On distingue de plus quatre types d'arêtes dans un squelette :

1. les arêtes de type 1 reliant la racine à un de ses fils,
2. les arêtes de type 2 reliant un A-sommet à un A-bloc,
3. les arêtes de type 3 reliant un A-sommet à un B-bloc,
4. les arêtes de type 4 reliant un B-sommet à un A-bloc.

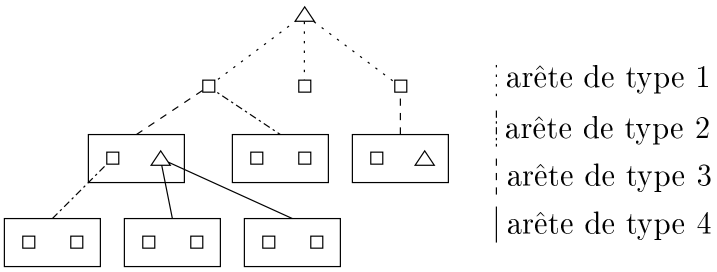


FIG. 6.13 – Un 4-squelette

Remarque 160. Soit T une arborescence l-constellée ayant n sommets de couleur $c_1, \ldots,$ c_{l-1} et n' sommets de couleur c_l. En en remplaçant chaque sommet de couleur $c_1, \ldots, c_{l-1}$ par un A-sommet et chaque sommet de couleur c_l par un B-sommet, on obtient un l-squelette S ayant n A-sommets et n' B-sommets. On appelle alors S le *squelette de A*.

Lemme 161. *Soient $l \geq 3$ et S un l-squelette ayant f B-sommets et k arêtes de type* 4. *Le nombre d'arborescences l-constellées dont S est le squelette est* $(l-2)^{f-1}(l-1)^k$.

Preuve. Pour obtenir une arborescence l-constellée à partir de S, on peut utiliser l'algorithme suivant. Tout d'abord on colorie la racine par la couleur c_l, les fils de la racine, de gauche à droite, par les couleurs $c_{l-1}, \ldots, c_1$. On effectue ensuite un parcours en profondeur de S et pour chaque bloc b rencontré, dont le père x a été précédemment colorié c_i $(i \neq l)$ s'il s'agissait d'un A-sommet, c_l dans le cas d'un B-sommet :

- si l'arête reliant x à b est de type 2 (x était un A-sommet et b ne contient pas de B-sommet), colorier les $l-2$ sommets de b par les $l-2$ couleurs c_j autres que c_i et c_l, de gauche à droite par couleur croissante,

- si l'arête reliant x à b est de type 3 (x était un A-sommet et b contient un B-sommet y), choisir un entier $k \in [l-1]$ différent de i, colorier y par c_l et les $l-3$ A-sommets de b par les couleurs c_j autres que c_i, c_k et c_l, de gauche à droite par couleur croissante,
- si l'arête reliant x à b est de type 4 (x de couleur c_l était un B-sommet) choisir un entier $k \in [l-1]$ et colorier les $l-2$ A-sommets de b par les couleurs c_j autres que c_k et c_l, de gauche à droite par couleur croissante.

La preuve du lemme découle directement de cet algorithme de coloration du squelette S. □

Lemme 162. *Soient $l \geq 3$, n et $f > 1$ trois entiers tels qu'il existe un entier p vérifiant $(n+f-2) = p(l-2)$ et $f \leq p$. Le nombre de l-squelettes ayant n A-sommets, f B-sommets et k arêtes de type 4 est*

$$\frac{(l-1)}{n}\binom{p-k-1}{f-1}\binom{p+n-k-2}{n-1}\binom{k+f-2}{f-2}.$$

Preuve. Tout d'abord, on peut remarquer qu'il existe un l-squelette ayant n A-sommets et f B-sommets si et seulement si il existe un entier p tel que $(n+f-2) = p(l-1)$, $p-1$ étant alors le nombre de blocs de ce squelette (donc de l'endofonction correspondante), et $1 \leq f \leq p$.

Ensuite, pour prouver le lemme, nous allons considérer des l-squelettes étiquetés, les A-sommets sur $[n]$ et les B-sommets sur $[f]$. De même que pour les arborescences l-cactacées (remarque 116), si $a_{l,n,f}$ (resp. $b_{l,n,f}$) est le nombre de l-squelettes sur (n,f) (resp. étiquetés sur $[n,f]$), nous avons alors

$$b_{l,n,f} = n! \times f! \times a_{l,n,f}. \tag{6.5}$$

Considérons les endofonctions sur des éléments de deux types (les A-éléments étiquetés sur [n] et les B-éléments étiquetés sur [f]) et notons $c_{l,n,f}$ le nombre de fonctions g de $[0,n,f]$ dans $[n,f]$ telles que

- la fibre $g^{-1}(0)$ de 0 comporte exactement $l-1$ A-éléments linéairement ordonnés, dont l'élément étiqueté 1 (ces endofonctions sont donc restreintes), et aucun B-élément,
- la fibre $g^{-1}(x)$ de tout A-élément x est structurée en une liste ordonnée de A-blocs et de B-blocs (définition 159),
- la fibre de tout B-sommet est structurée en une liste ordonnée de A-blocs.

On déduit alors de la preuve bijective de la formule de Lagrange bivariée que

$$b_{l,n,f} = f \times c_{l,n,f-1}, \tag{6.6}$$

le terme $f \times c_{l,n,f-1}$ provenant du fait que pour pouvoir appliquer la bijection entre arborescences et endofonctions restreintes, on doit transformer le B-sommet racine (dont l'étiquette appartient à $[f]$) en un sommet 0, ce qui donne une endofonction ayant $f-1$ B-éléments.

Il nous reste maintenant à énumérer ces endofonctions. Plus précisément, il nous faut déterminer le nombre d'endofonctions $c_{l,n,f-1}$ ayant k A-blocs dans les fibres des B-éléments. En effet, pour ce dernier point, on utilise le fait que la bijection entre arborescences et endofonctions préserve exactement le nombre d'éléments de chaque couleur (type) dans toutes les fibres (propriété 101). Procédons par étapes.

1. La fibre de l'élément 0. Examinons dans un premier temps la fibre $g^{-1}(0)$ de 0 : elle doit comporter $l-1$ A-éléments, dont le A-élément étiqueté 1, ordonnés linéairement. L'élément 0 peut donc avoir

$$(l-1)!\binom{n-1}{l-2} \tag{6.7}$$

fibres différentes.

2. Répartition des blocs. Les endofonctions considérées ont k A-blocs dans les fibres des $f-1$ B-éléments. Ainsi, les $p-1-k$ autres blocs sont dans les fibres des n A-éléments, $f-1$ étant des B-blocs (on rappelle que $f>1$). En utilisant le lemme 107 on a

$$\binom{k+f-2}{f-2} \tag{6.8}$$

façons de répartir les k A-blocs dans les fibres des f B-éléments et

$$\binom{p+n-k-2}{n-1}\binom{p-k-1}{f-1} \tag{6.9}$$

façons de répartir les $p-1-k$ autres blocs dans les fibres des n A-éléments, $f-1$ parmi ces $p-1-k$ blocs étant des B-blocs.

3. Placement des éléments dans les blocs. La fibre de l'élément 0 ayant été construite, il reste à placer $n-(l-1)$ A-éléments et les $f-1$ B-éléments, ce qui se fait de

$$(n-l+1)!(f-1)! \tag{6.10}$$

façons.

Le nombre d'endofonctions $c_{l,n,f-1}$ s'obtient en effectuant le produit des quatre termes (6.7), (6.8), (6.9), (6.10). Combiné à (6.5) et (6.6), on en déduit la formule du lemme. □

Preuve du théorème 130. La formule (6.2) du théorème 130 est une conséquence des lemmes 162 et 161, de (6.4), en remplaçant l par $m+1$ et du fait que, si $f>1$, le nombre d'arêtes de types 4 d'un squelette ayant $p-1$ blocs et $f-1$ B-sommets varie de 0 (les $f-1$ B-sommets sont des feuilles) à $p-f$ (tous les A-blocs sont des fils des B-sommets).

Pour le cas $f=1$ et la formule (6.3) du théorème, qui dénombre les cactus m-aires suivant le nombre de sommets (remarque 127), on applique le même raisonnement, en remarquant toutefois que les squelettes correspondant ne peuvent avoir d'arête de type 4 ($f=1$ et $k=0$ dans le lemme 162). □

Remarque 163. Compte-tenu de la formule d'Euler liant les trois paramètres nombre de sommets n, nombre de m-gones p et nombre de faces blanches f par $n+f-2=p(m-1)$ le théorème 130 exprime le dénombrement des m-constellations selon deux quelconques de ces trois paramètres.

Le cas $m=2$: les cartes biparties. Une carte bipartie est une carte planaire enracinée dont les sommets sont de deux types (A-sommets et B-sommets), telle que que toute arête relie un A-sommet à un B-sommet. Walsh [163] a prouvé le résultat suivant.

Théorème 164. [163] *Le nombre de cartes biparties ayant n ($n\geq 2$) sommets et f ($f>1$) faces est*

$$2\frac{(n+f-3)!}{(f-1)!n!}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{2n+2f-4}{n-2-k}\binom{f+k}{k}.$$

Or, en remplaçant chaque A-sommet (resp. B-sommet) d'une carte bipartie par un sommet de couleur c_1 (resp. c_2), et chaque arête par un 2-gone, on obtient une 2-constellation.

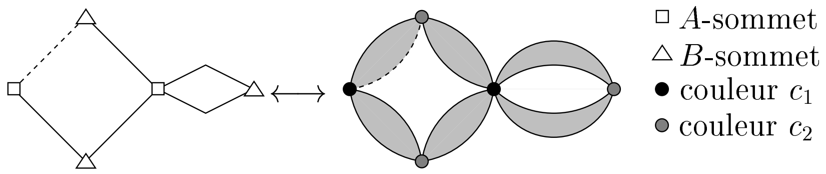


FIG. 6.14 – Une carte bipartie et la 2-constellation correspondante

En posant $m = 2$ dans le théorème 130 et en remarquant que $p = n + f - 2$, on obtient immédiatement le corollaire suivant, qui donne une formule différente de celle obtenue par Walsh pour l'énumération de cartes biparties.

Corollaire 165. *Le nombre de cartes biparties ayant n ($n \geq 2$) sommets et f faces ($f > 1$) est*

$$\frac{2}{n\ f}\sum_{k=0}^{n-2} 2^k \binom{n+f-3-k}{f-1}\binom{2n+f-k-4}{n-1}\binom{k+f-2}{f-2}.$$

6.3.2.2 Génération de constellations

Dans ce paragraphe, nous déduisons de la preuve du théorème 130 un algorithme de génération de m-constellations ayant n sommets et f faces. Le principe de cet algorithme est similaire à celui de l'algorithme de génération aléatoire de cactus présenté dans le chapitre précédent et comporte 4 étapes :

– engendrer une endofonction,
– appliquer la bijection entre endofonctions et arborescences, pour obtenir un squelette
– colorier ce squelette pour obtenir une arborescence constellée,
– appliquer le transformation entre arborescences constellées et constellations.

Cependant, il y a deux différences majeures qui compliquent l'application de ce principe. La première réside dans le fait que les endofonctions définies dans la preuve du lemme 162 le sont non seulement en fonctions des paramètres m, n et f, mais aussi en fonction du nombre k d'arêtes de type 4, qui influe lui-même sur le nombre de façons de colorier le squelette correspondant. Cette contrainte oblige, comme on le verra dans l'algorithme 8 à manipuler des nombres entiers longs. La seconde est liée à la transformation d'une arborescence constellée en constellation, qui est moins directe que dans le cas des cactus, sans toutefois alourdir la complexité asymptotique de l'algorithme.

Algorithme 8: Génération aléatoire de m-constellations

Données : trois entiers m, n et f
Résultat : m-constellation ayant n sommets et f faces blanches
début
- $p := (n+f-2)/(m-1)$, $t := 0$;
- **pour** k allant de 0 à $p-f$ **faire**
  - $t_k := m^{k+1}\binom{p-k-1}{f-1}\binom{p+n-k-2}{n-1}\binom{k+f-2}{f-2}$;
  - $t := t + t_k$;
- tirer un entier $0 \leq k \leq p-f$ avec probabilité t_k/t;
- engendrer une endofonction g sur $[n,f-1]$ ayant k arêtes de type 4 (lemme 162);
  1. engendrer la fibre de 0;
  2. répartir les $p-1$ blocs;
  3. placer les éléments dans les blocs;
- transformer g en $(m+1)$-squelette S (par application de la bijection entre endofonctions et arborescences);
- choisir l'étiquette $x \in [f]$ de la racine du $(m+1)$-squelette S;
- transformer S en une arborescence $(m+1)$-constellée A en le coloriant aléatoirement (lemme 161);
- transformer A en une arborescence $(m+1)$-eulérienne régulière B (proposition 157);
- transformer B en carte $(m+1)$-eulérienne régulière E (proposition 148);
- transformer E en $(m+1)$-constellation régulière D;
- transformer D en m-constellation C (proposition 133);
- **retourner** C

fin

Lemme 166. *L'Algorithme 8 permet d'engendrer aléatoirement et uniformément une m-constellation à n sommets et f faces blanches,en temps et espace $O^*(n+f)$ (la notation $O^*(n+f)$ indiquant que la complexité est linéaire en terme d'opérations manipulant des entiers arbitrairement longs).*

Preuve. Il est clair que cet algorithme engendre une m-constellation ayant n sommets et f faces blanches. Il reste à vérifier que cette génération est uniforme et que les complexités en temps et en espace sont linéaires.

1. Génération uniforme. L'uniformité de la génération est assurée par les premières étapes consistant à choisir le nombre k d'arêtes de type 4 de l'endofonction (et donc du squelette) que l'on va engendrer ensuite. En effet, on remarque immédiatement que t_k/t est la probabilité qu'une arborescence constellée ait un squelette ayant k arêtes de type 4. De plus, pour un squelette S donné, l'algorithme de coloration aléatoire d'un squelette (lemme 161) produit chaque arborescence constellée ayant S pour squelette avec la même probabilité (qui est $1/((m-1)^{f-1}m^k)$). Finalement, de la même manière que dans la preuve du lemme 122, on montre aisément que la génération aléatoire des endofonctions ayant sur $[n,f-1]$ et k arêtes de type 4 (étapes 1, 2 et 3) est uniforme.

2. Complexité linéaire en temps et en espace. La première partie de l'algorithme, consistant à choisir l'entier k, nécessite d'effectuer $O(p-f)$ opérations sur des entiers arbitrairement longs, où $p-1$ est le nombre de polygones de la constellation finale, et est donc inférieur à $(n+f)$. Le choix de k se fait donc en temps, $O^*(n+f)$. Comme dans la preuve du lemme 122, on montre aisément que la complexité de la génération du squelette S se fait en temps $O(n)$. La coloration de S se fait lors d'un parcours de ce squelette en temps $O(n+f)$. Chaque étape de la transformation de l'arborescence constellée A ainsi obtenue en arborescence eulérienne régulière B s'effectue en un parcours en profondeur de A et en temps $O(n)$. La transformation de B en carte eulérienne régulière E se fait en cloturant B, opération linéaire en temps et espace [25, 135]. Finalement, calculer la carte duale de E et appliquer la transformation entre $(m+1)$-constellations régulières et m-constellations ne pose aucun problème algorithmique et s'effectue en temps linéaire. □

6.4 Conclusion

L'intérêt de ce chapitre est de combiner deux constructions combinatoires intéressantes, la bijection entre arborescences et endofonctions et la conjugaison d'arborescences. Il reste cependant plusieurs questions que nous n'avons pu résoudre.

Énumération de constellations selon la distribution des couleurs. La première est une généralisation naturelle du théorème 130 : quel est le nombre de m-constellations ayant n_i sommets de couleur c_i $(i = 1, \dots, m)$ et f faces blanches ? Dans le cas $f = 1$, c'est-à-dire les cactus m-aires, le théorème 120 répond à cette question. Cependant, dès que $f > 1$, nous n'avons pas pu étendre de manière satisfaisante la construction utilisée dans le cas des arborescences cactacées aux arborescences constellées. En effet, si on peut définir, de manière analogue aux endofonctions cactacées, une famille d'endofonctions *constellées* correspondant aux arborescences constellées, le fait que dans ces endofonctions il “manque” deux couleurs parmi les $(m+1)$ possibles (dans les blocs des endofonctions cactacées il ne manque qu'une couleur), introduit un degré de liberté difficile à gérer :

- dans le cas des endofonctions cactacées, un i-bloc est forcément dans la fibre d'un sommet de couleur c_i (voir la propriété (a) de la preuve du théorème 120), et on déduit ainsi de $\mathbf{n}$ le nombre de blocs présents dans les fibres des sommets de chaque couleur,
- dans le cas des endofonctions constellées, un (i,j)-bloc peut appartenir à la fibre d'un sommet de couleur c_i ou c_j et, pour une distribution $(\mathbf{n},f)$ donnée, le nombre de blocs présents dans les fibres des sommets de couleur c_i n'est donc pas unique.

Une des voies permettant de résoudre ce problème consiste peut-être à étudier le cas non trivial le plus simple, c'est-à-dire le cas des constellations à 2 faces $(f = 2)$. On peut aussi noter que dans le cas $m = 2$ (c'est-à-dire les cartes biparties), les blocs des arborescences 3-constellées (on rappelle qu'énumérer les 2-constellations revient à énumérer les arborescences 3-constellées) se réduisent à un seul sommet, et ces arborescences sont donc très proches des arborescences 3-chromatiques ordonnées, introduites en conclusion du chapitre précédent. Plus précisément, une arborescence 3-constellée est une arborescence 3-chromatique ordonnée telle que la racine est de couleur c_3 et a deux fils, un de chaque couleur c_3 exceptée, ordonnés par couleur décroissante. En utilisant la même technique que pour la formule (5.18) (technique basée sur la proposition 124), on peut ainsi obtenir une formule, particulièrement lourde et inélégante, pour le nombre de cartes biparties ayant

n_1 A-sommets, n_2 B-sommets et n_3 faces :

$$(n_1+q_1)(n-3)\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-2}\sum_{k_3=0}^{n_3-1}\frac{(n_1+q_1-1)!(n_2+q_2-2)!(n_3+q_3-1)!}{(n_2-1)\mathbf{k}!(\mathbf{n}-\mathbf{k}-\mathbf{1})!}+$$

$$(n_2+q_2)(n-3)\sum_{k_1=0}^{n_1-2}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\sum_{k_3=0}^{n_3-1}\frac{(n_1+q_1-2)!(n_2+q_2-1)!(n_3+q_3-1)!}{(n_1-1)\mathbf{k}!(\mathbf{n}-\mathbf{k}-\mathbf{1})!}+$$

$$(n_1+q_1)(n_2+q_2)\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\sum_{k_3=0}^{n_3-1}\frac{(n_1+q_1-1)!(n_2+q_2-1)!(n_3+q_3)!}{\mathbf{k}!(\mathbf{n}-\mathbf{k}-\mathbf{1})!},$$

où $n = n_1 + n_2 + n_3$, $q_1 = k_2 + k_3$, $q_2 = n_3 + k_1 - k_3 - 1$, $q_3 = n_1 + n_2 - k_1 - k_2 - 3$, $\mathbf{n} = (n_1,n_2,n_3)$ et $\mathbf{q} = (q_1,q_2,q_3)$.

Distribution des degrés. Il serait aussi intéressant d'interpréter la distribution des degrés des sommets de chaque couleur et des degrés des faces d'une constellation en termes d'arborescences constellées, comme on peut le faire dans le cas des cactus.

Constellations non enracinées. Finalement, il est naturel de vouloir énumérer les constellations non enracinées non étiquetées. Dans le cas des cactus (constellations à une seule face blanche), Bousquet [22] a remarqué qu'une méthode introduite par Liskovets [111] permettait de résoudre ce problème. Il semble que l'on puisse appliquer la méthode de Liskovets aux constellations [25, Théorème 3.1].