Stellingen
behorende bij het proefschrift
CHABAUTY METHODS AND COVERING TECHNIQUES APPLIED TO GENERALISED FERMAT EQUATIONS
van
Nils Bruin

De stellingen 1 tot en met 4 hebben betrekking op het onderwerp van het proefschrift.

1. Gehele oplossingen van $x^3+y^3=z^4$ met $xyz \neq 0$ hebben priemdelers gemeenschappelijk. Merk op dat dergelijke oplossingen wel bestaan, zoals $((s^3+t^3)s)^3 + ((s^3+t^3)t)^3 = (s^3+t^3)^4$ aangeeft.

2. De jacobiaan J van de kromme gegeven door de vergelijking $Y^2 = X^6 - 20X^3 - 8$ heeft een Mordell-Weil groep van drie elementen, terwijl $J(\mathbb{Q}_p)$ een $C(3) \times C(3)$ bevat voor alle p. Dit weerspreekt het in [1] geuite geloof dat torsie van abelse variëteiten altijd met lokale argumenten te bepalen is.

   [1] J.W.S. Cassels en E.V. Flynn, *Prolegomena to a Middlebrow Arithmetic of Curves of Genus 2*, Cambridge, 1996, p. 82

3. Laat $\phi : E \to \mathbb{P}_1$ een elliptische overdekking over een getallenlichaam L zijn en laat $\mathfrak{p}$ en $\mathfrak{q}$ twee goede priemen zijn (van verschillende karakteristiek). Indien de groep opgespannen door $E(L) \cap E^{(1)}(L_\mathfrak{p})$ en $E(L) \cap E^{(1)}(L_\mathfrak{q})$ niet de hele $E(L)$ is, dan kan informatie bij $\mathfrak{q}$ gebruikt worden om informatie te krijgen over $(\phi(E(L)) \cap \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})) \bmod \mathfrak{p}$. Het is daarom raadzaam om in Chabauty-argumenten zoals beschreven in Sectie 4.5, een priem p te kiezen waarvoor de groepsorden van $(E \bmod \mathfrak{p})(\mathcal{O}/\mathfrak{p})$ voor $\mathfrak{p} \mid p$ voornamelijk bestaan uit kleine priemfactoren.

4. Voor een grondige analyse van Chabauty-methoden is het cruciaal om te onderzoeken of de volgende nachtmerrie-achtige situatie zich kan voordoen:

   - A is een simpele abelse variëteit over $\mathbb{Q}$ (niet noodzakelijkerwijs absoluut simpel) en C is een algebraïsche kromme over $\mathbb{Q}$ in A.
   - $\mathrm{rk}(A(\mathbb{Q})) < \dim(A)$
   - $C(\mathbb{Q}) \neq C(\mathbb{Q}_p) \cap \overline{A(\mathbb{Q})}$ voor alle eindige priemen p van $\mathbb{Q}$. Hier staat $\overline{A(\mathbb{Q})}$ voor de topologische afsluiting van $A(\mathbb{Q})$ in $A(\mathbb{Q}_p)$.

5. Door gebruik te maken van het analogon van

   $$1,4 + 1,5 = ((1,4 + 7,9) + 1,5) - 7,9$$

   kan in sommige groepen het rekenen aanzienlijk versimpeld worden.

6. Laat K een algebraïsch getallenlichaam zijn. Definieer voor een ideaal $I \subset \mathcal{O}_K$, de *conductor* $r_K(I) := \log N_{K/\mathbb{Q}}(\mathrm{rad}(I))$, waarbij $\mathrm{rad}(I)$ staat voor het product van de priemidealen van $\mathcal{O}_K$ die I delen.

Laat $L \supset K$ een lichaamsuitbreiding van graad $\leq n$, onvertakt bij de priemidealen die een gegeven ideaal $D \subset \mathcal{O}_K$ *niet* delen. Dan geldt

$$r_K(I) - (n-1)\log N_{K/\mathbb{Q}}(D) \leq \frac{1}{n} r_L(I\mathcal{O}_L) \leq r_K(I).$$

Deze ongelijkheid laat zien dat de redenering in [2], zelfs bewijst dat ABC over $\mathbb{Q}$ Faltings' stelling voor krommen over $\mathbb{Q}$ impliceert. In het genoemde artikel wordt slechts beweerd dat ABC over getallenlichamen dat doet.

[2] Noam D. Elkies, *ABC* implies Mordell, *Internat. Math. Res. Notices*, 1991:99–109

7. Computeralgebrapakketten dienen de simplificatieregel $\frac{0}{x} = 0$ slechts toe te passen als zij zich van de inverteerbaarheid van x hebben vergewist.

8. De notatie $\mathbb{F}_p$, met p een priemgetal, om $\mathbb{Z}/p$ aan te duiden, dient uitgebreid te worden tot $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$, met $\mathfrak{p}$ een priemideaal van een ring van gehelen $\mathcal{O}$ van een getallenlichaam om het residuenlichaam $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ aan te duiden.

9. Als de rekenkracht van computers zich iedere twee jaar blijft verdubbelen, dan is trial division een factorisatie-algoritme met polynomiale looptijd, indien tussentijdse modernisering van de apparatuur is toegestaan.

10. Het is bemoedigend om te zien dat een gemeenschap zonder winstoogmerk in staat is om een hoogwaardig produkt zoals Linux met zo veel enthousiasme te maken.

11. Het valt zeer te betwijfelen of politici die verkondigen:“ ... en ik ben het met iedereen eens die deze stelling met mij bepleit.”, in staat zijn om zinvol wetenschappelijk onderzoek te onderscheiden van leeg gekakel.