Une généralisation des résultats de Kreweras sur le polynôme énumérateur des inversions dans les arborescences

Cedric Chauve, Philippe Duchon, Serge Dulucq

LaBRI, Université de Bordeaux I

Research report RR-1241-00, LaBRI, Université Bordeaux I, 2000.

UNE GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS DE KREWERAS SUR LE POLYNÔME ÉNUMÉRATEUR DES INVERSIONS DANS LES ARBORESCENCES

CEDRIC CHAUVE, PHILIPPE DUCHON, SERGE DULUCQ

RÉSUMÉ. Dans [9], Kreweras étudie le polynôme énumérateur des inversions des arborescences de racine 1. Dans cet article, nous nous intéressons au polynôme énumérateur des inversions des arborescences telles que la racine est inférieure à ses fils, une famille d'arborescences introduite dans [3]. Nous obtenons des généralisations de plusieurs résultats de Kreweras [9]. Nous démontrons notamment une récurrence vérifiée par ce polynôme et nous montrons que son évaluation en 0, 1, 2 et -1 prend des valeurs remarquables, liées à certaines familles de graphes connexes et aux nombres d'Euler et d'Entringer.

1. Inversions et arborescences

On appelle *arborescence* sur $[n]$ un graphe connexe sans cycle, à n sommets étiquetés par $\{1, \cdots, n\}$, ayant un sommet distingué appelé la racine. Dans cet article nous nous intéressons à la famille des arborescences telles que la racine est inférieure à ses fils, introduite dans [3] (ces arborescences apparaissent aussi dans des travaux de Gessel traitant d'arrangements d'hyperplans cités dans [1]). Nous notons $\mathcal{A}_n$ l'ensemble de ces arborescences sur $[n]$ et $\mathcal{A}_{n,r}$ les arborescences de $\mathcal{A}_n$ de racine r. Dans [3], ces arborescences sont étudiées selon divers paramètres combinatoires classiques comme le nombre de sommets ou l'étiquette de la racine.

Une *inversion* dans une arborescence A est un couple (x,y) de sommets tels que $x > y$ et y est un descendant de x (x est sur l'unique chemin allant de la racine de A à y). On note $inv(A)$ le nombre d'inversions d'une arborescence A.

Mallows et Riordan [11] ont été les premiers à considérer ce paramètre, dans le cas des arborescences de racine 1, et à introduire la notion de *polynôme énumérateur des inversions*.

Définition 1. *Soit $\mathcal{K}_n$ un ensemble d'arborescences sur $[n]$. Le polynôme énumérateur des inversions de $\mathcal{K}_n$ est défini par*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}_n}(q) = \sum_{A \in \mathcal{K}_n} q^{inv(A)}.$$

Le polynôme énumérateur des inversions des arborescences de racine 1 est relié à de nombreux problèmes combinatoires, comme le polynôme de Tutte pour certaines familles de graphes [6], les fonctions de parking [9, 13] et les fonctions de k-parking [21], l'activité externe d'une arborescence [2], ou les arrangements d'hyperplans [18, 17], comme nous l'avons déjà mentionné en conclusion du chapitre précédent. Pour des familles autres que les arborescences de Cayley, il existe peu de résultats. On peut essentiellement citer les travaux de Gessel, Sagan et Yeh [7] et de Chen [4] pour les arborescences ordonnées, cycliques et planes de racine 1.

On note $\mathcal{P}_n(q)$ le polynôme énumérateur des arborescences de racine 1. La première étude détaillée de ce polynôme est due à Kreweras [9] qui obtient notamment la formule de récurrence suivante.

Proposition 1. [9] *Le polynôme énumérateur des inversions des arborescences de racine* 1 *vérifie la relation de récurrence :*

$$\mathcal{P}_1(q) = 1, \tag{1}$$

$$\mathcal{P}_{n+1}(q) = \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} \left(\sum_{i=0}^{m-1} q^i \right) \mathcal{P}_m(q)\mathcal{P}_{n+1-m}(q). \tag{2}$$

Kreweras montre qu'évalué en $q = -1,0,1,2$, le polynôme $\mathcal{P}_n(q)$ prend des valeurs remarquables, qui font notamment intervenir les nombres d'Euler et le nombre de graphes étiquetés simples connexes.

Définition 2. *On note e_n le $n^{\text{ème}}$ nombre d'Euler; ces nombres sont donnés par la série génératrice*

$$\sum_{n\geq 0} e_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)},$$

ou par la récurrence

$$e_0 = 1,\ e_{n+1} = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2m} e_{2m} e_{n-2m}.$$

Proposition 2. *Soit $n > 0$.*

$$\mathcal{P}_n(0) = (n-1)!, \tag{3}$$

$$\mathcal{P}_n(1) = n^{n-2}, \tag{4}$$

$$\mathcal{P}_n(-1) = e_{n-1}. \tag{5}$$

Les preuves des identités (3) et (4) sont immédiates : $\mathcal{P}_n(0)$ est le nombre d'arborescences sur $[n]$ ne comportant aucune inversion, c'est à dire le nombre d'arborescences croissantes, c'est à dire $(n-1)!$, et $\mathcal{P}_n(1)$ est le nombre d'arborescences sur $[n]$ de racine 1, c'est à dire n^{n-2} (voir [12]). La preuve de l'identité (5) donnée par Kreweras est basée sur les récurrences satisfaites par $\mathcal{P}_n(q)$ et par les nombres d'Euler. Or les nombres d'Euler énumèrent de nombreux objets combinatoires, comme par exemple les permutations alternantes [10] ou les arborescences croissantes paires [20]. Pansiot [14] a utilisé ce dernier point pour donner une preuve combinatoire de (5), basée sur une technique que nous utilisons dans la prochaine section pour généraliser ce résultat aux arborescences de $\mathcal{A}_{n,r}$.

Définition 3. *On appelle graphe simple étiqueté sur $[n]$ un graphe à n sommets étiquetés par $\{1,\ldots,n\}$, n'ayant ni boucle ni arête multiple. On note $\mathcal{G}_n$ l'ensemble de tels graphes connexes sur $[n]$ et $g_n = |\mathcal{G}_n|$.*

Proposition 3. [9] *Soit $n > 0$.*

$$\mathcal{P}_n(1+q) = \sum_{G\in\mathcal{G}_n} q^{a(G)-n+1} \tag{6}$$

où $a(G)$ est le nombre d'arêtes de G. On en déduit alors que

$$\mathcal{P}_n(2) = g_n. \tag{7}$$

La première preuve de ce résultat est due à Kreweras qui montre que le nombre de graphes connexes simples étiquetés sur $[n]$ satisfait une récurrence similaire à celle de $\mathcal{P}_n(2)$ et en déduit (7). Dans [8], Gessel et Wang proposent une preuve bijective de (6) basée sur la notion de parcours en profondeur d'un graphe. Nous reprendrons ce principe pour prouver un résultat analogue pour le polynôme associé aux arborescences de $\mathcal{A}_n$.

Finalement, on peut relier le polynôme des inversions des arborescences au polynôme de Tutte des graphes complets.

Définition 4. *Soit G un graphe aux arêtes totalement ordonnées et A une arborescence couvrante de G. Une arête (x,y) de G n'appartenant pas à A (resp. appartenant à A) est* externe *(resp.* interne*) si elle est la plus grande arête de l'unique cycle du graphe $A \cup (x,y)$ (resp. cocycle de $G - \{A \cup (x,y)\}$) contenant (x,y). On note $EA_G(A)$ (resp. $IA_G(A)$) l'ensemble des arêtes externes (resp. internes) de G relativement à A.*

Le polynôme de Tutte de G est alors défini par

$$\mathcal{T}_G(u,q) = \sum_A u^{|IA_G(A)|} q^{|EA_G(A)|},$$

oà la somme est sur toutes les arborescences couvrantes A de G.

Tutte [19] a notamment montré que ce polynôme ne dépendait pas de l'ordre choisi sur les arêtes de G. Si on note K_n le graphe complet à n sommets, on a alors le résultat suivant [2, 6].

Proposition 4. *Soit $n > 0$.*

$$\mathcal{T}_{K_n}(1,q) = \mathcal{P}_n(q) \tag{8}$$

2. Polynôme des inversions de $\mathcal{A}_n$

Dans cette section, nous nous intéressons au polynôme des inversions des arborescences dont la racine est inférieure à ses fils, que nous notons $\hat{\mathcal{P}}_n(q)$. Plus précisément, nous étudions la famille $\mathcal{A}_{n,r}$ des arborescences de $\mathcal{A}_n$ ayant pour racine $r \in [n-1]$, dont nous notons $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(q)$ le polynôme énumérateur des inversions (on a donc $\hat{\mathcal{P}}_{n,1}(q) = \mathcal{P}_n q$). Pour ce polynôme, nous obtenons des généralisations des Propositions 1, 2, 3 et 4 (en posant $r = 1$ dans nos résultats, on retrouve les résultats de Kreweras).

Dans un premier temps, nous nous intéressons à une formule de récurrence pour ce polynôme et à son évaluation en 0, 1 et 2. Nous relions notamment cette dernière valeur $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(2)$ à l'énumération de graphes simples connexes étiquetés sur $[n]$ tels que le sommet r est inférieur à ses voisins. Nous concluons ce paragraphe en reliant $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}$ au polynôme de Tutte de certains graphes dérivés du graphe complet. Dans un deuxième temps, nous montrons que la valeur de ce polynôme en -1 est liée aux nombres d'Entringer (qui raffinent les nombres d'Euler). On peut noter que la plupart des résultats de Kreweras sur $\mathcal{P}_n(q)$ s'interprètent en termes de graphes étiquetés, et que les généralisations que nous proposons pour $\hat{\mathcal{P}}_n(q)$ s'interprètent naturellement en termes de graphes tels que le sommet r est inférieur à tous ses voisins.

2.1. Une formule de récurrence pour $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(q)$ et évaluation de $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(0)$, $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(1)$ et $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(2)$.

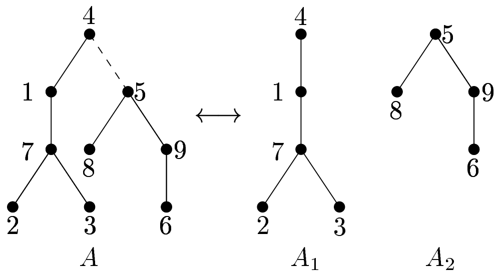
Proposition 5. *Le polynôme énumérateur des inversions des arborescences de $\mathcal{A}_{n,r}$ vérifie la relation de récurrence :*

$$\hat{\mathcal{P}}_{r,r}(q) = \begin{cases} 1 \text{ si } r = 1, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases} \tag{9}$$

$$\hat{\mathcal{P}}_{n+1,r}(q) = \sum_{m=1}^{n+1-r} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n-r}{m-1} \binom{r-1}{k} \left(\sum_{i=0}^{m-1} q^{2k+i} \right) \hat{\mathcal{P}}_{k+m,1}(q) \hat{\mathcal{P}}_{n',r'}(q), \tag{10}$$

où $n' = (n+1-m-k)$ et $r' = (r-k)$.

Preuve. La preuve de ce résultat est basée sur le même principe que la démonstration du cas $r = 1$ exposée par Kreweras dans [9]. Tout d'abord, la preuve de (9) est immédiate. Ensuite, soit A une arborescence de $\mathcal{A}_{n+1,0,r}$ et x le seul fils de la racine r situé sur le chemin allant de r à $n+1$. En supprimant l'arête reliant r et x, on obtient une forêt à deux arborescences (A_1,A_2) telle que r est la racine de A_1 et est inférieure à ses fils, x est la racine de A_2 et $n+1$ appartient à A_2 (on peut avoir $x = n+1$).



Si on note, pour une arborescence A et un entier r, $|A|_{>r}$ (resp. $|A|_{<r}$) le nombre de sommets de A supérieurs (resp. inférieurs) à r, on a alors

$$inv(A) = inv(A_1) + inv(A_2) + |A_2|_{<r}.$$

En posant $k = |A_2|_{<r}$ et $m = |A_2|_{>r}$ $(m \geq 1)$, on peut dire que A_1 comporte $n' = (n+1-m-k)$ sommets, dont exactement $r' = (r-1-k)$ sont inférieurs à la racine r, ce qui explique ainsi le terme $\hat{\mathcal{P}}_{n',r-k}(q)$ de (10), polynôme énumérant les inversions de A_1. Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_{k+m}$ les sommets de A_2 et x_i sa racine. En échangeant successivement les sommets x_i et x_{i-1}, puis x_{i-1} et x_{i-2}, …, puis x_2 et x_1, on obtient une arborescence A_2' de racine x_1 (c'est à dire dont la racine est le plus petit sommet). En remarquant que chaque échange de deux sommets consécutifs x_j et x_{j-1} diminue le nombre d'inversions de 1 (x_j, situé à la racine, est échangé avec x_{j-1} qui lui est inférieur), on constate que $inv(A_2') = inv(A_2) + i - 1$, les valeurs possibles pour i étant comprises entre $k+1$ et $k+n$ car la racine x_i de A_2 est supérieure à r et $k = |A_2|_{<r}$, et en rappelant que le nombre d'inversions de la forme (r,x) avec x dans A_2 est $k = |A_2|_{<r}$, on obtient l'explication du terme

$$\left(\sum_{i=0}^{m-1} q^{2k+i}\right) \hat{\mathcal{P}}_{k+m,1}(q),$$

et donc du résultat annoncé. □

En posant $r = 1$, on a alors $k = 0$ et on retrouve bien le résultat de la Proposition 1.

Proposition 6. *Soient $n > 0$ et $0 < r < n$.*

$$\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(0) = \begin{cases} (n-1)! \text{ si } r = 1, \\ 0 \text{ sinon}, \end{cases} \tag{11}$$

$$\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(1) = (n-r)n^{n-r-1}(n-1)^{r-2}. \tag{12}$$

Preuve. $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(0)$ est le nombre d'arborescences croissantes de racine r inférieure à ses fils. Une arborescence croissante étant obligatoirement de racine 1, on a immédiatement la preuve de (11). $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(1)$ est le nombre d'arborescences de $\mathcal{A}_{n,r}$. L'identité (12) découle de cette remarque et du fait que $|\mathcal{A}_{n,r}| = (n-r)n^{n-r-1}(n-1)^{r-2}$ (cf [3]). □

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du fait que $|\mathcal{A}_n| = (n-1)^{n-1}$.

Corollaire 1. *Soit $n > 0$.*

$$\hat{\mathcal{P}}_n(0) = (n-1)!, \tag{13}$$

$$\hat{\mathcal{P}}_n(1) = (n-1)^{n-1}. \tag{14}$$

On note $\mathcal{G}_{n,r}$ l'ensemble des graphes simples connexes étiquetés sur $[n]$ tels que le sommet r est inférieur à tous ses voisins (sommets reliés à r par une arête), et $g_{n,r} = |\mathcal{G}_{n,r}|$.

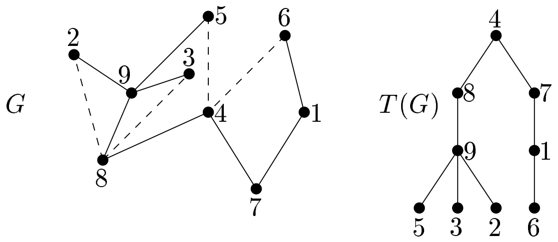
Proposition 7. *Soient $n > 0$ et $0 < r < n$.*

$$\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(1+q) = (1+q)^{2(r-1)} \sum_{G \in \mathcal{G}_{n,r}} q^{a(G)-n+1} \tag{15}$$

où $a(G)$ est le nombre d'arêtes de G. Il s'en suit que

$$\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(2) = 4^{(r-1)} g_{n,r}. \tag{16}$$

Preuve. Nous étendons la méthode utilisée par Gessel et Wang [8] pour prouver combinatoirement la Proposition 3. Soit G un graphe de $\mathcal{G}_{n,r}$. On appelle *arborescence couvrante maximale de G*, notée $T(G)$, l'arborescence obtenue en réalisant un parcours en profondeur de G à partir du sommet r de la manière suivante : si x est le dernier sommet rencontré lors du parcours, le sommet que l'on visite ensuite est le plus grand voisin de x non encore rencontré. Dans l'exemple suivant, les arêtes pleines sont les arêtes empruntées lors d'un tel parcours du graphe G lorsque $r = 4$.



Soit A une arborescence de racine r inférieure à ses fils. Soit $C(A)$ l'ensemble des couples (x,y) ne correspondant pas à des arêtes de A tels que

- si $x = r$ alors (r,y) ne constitue pas une inversion et le fils z de r situé sur le chemin menant à y est tel que (z,y) est une inversion,
- si $x \neq r$ alors il existe z tel que (x,z) est une arête de A et (z,y) est une inversion.

Dans l'exemple, $C(T(G)) = \{(4,5),(4,6),(8,2),(8,3),(8,5)\}$. On constate que chaque inversion (x,y) de A induit un couple de $C(A)$ excepté lorsque

- $x = r$: $r-1$ inversions sont de cette forme
- x est un fils de la racine r et $y < r$ (les couples (r,y) où $y > r$ ne constituant pas une inversion sont dans $C(A)$) : il y a $r-1$ couples de cette forme puisque $x > r$.

Dans notre exemple, les inversions (8,5), (7,6), (9,2), (9,3) et (9,5) correspondent respectivement à (4,5), (4,6), (8,2), (8,3) et (8,5). On en déduit donc que $|C(A)| = inv(A) - 2(r-1)$. Soit $\mathcal{G}_A$ l'ensemble des graphes G tels que $T(G) = A$. Par définition de l'arborescence couvrante maximale d'un graphe et de $C(A)$, on peut dire que, pour une arborescence A donnée, un graphe G appartient à $\mathcal{G}_A$ si et seulement si toutes les arêtes de G non présentes dans A appartiennent à $C(A)$. On en déduit que, si $|A| = n$,

$$\sum_{G \in \mathcal{G}_A} q^{a(G)} = q^{n-1}(1+q)^{inv(A)-2(r-1)},$$

le terme q^{n-1} correspondant aux arêtes de A et le terme $(1+q)^{inv(A)-2(r-1)}$ correspondant aux autres arêtes choisies dans $C(A)$. En sommant sur toutes les arborescences couvrantes maximales, c'est à dire sur toutes les arborescences de $\mathcal{A}_{n,r}$, on obtient le résultat attendu. □

La preuve du corollaire suivant est alors immédiate.

Corollaire 2. *Soit $n > 0$.*

$$\hat{\mathcal{P}}_n(1+q) = \sum_{G \in \mathcal{G}_n} q^{a(G)-n+1} \mathcal{Q}_G(1+q) \tag{17}$$

où, si on note $S(G)$ l'ensemble des sommets de G inférieurs à leurs voisins,

$$\mathcal{Q}_G(q) = \sum_{x \in S(G)} q^{2(x-1)}.$$

Si on note $K_{n,r}$ le graphe complet privé des arêtes entre r et les sommets $1,2,\ldots,r-1$, on relie alors $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(q)$ à $\mathcal{T}_{K_{n,r}}(1,q)$.

Proposition 8. *Soient $n > 0$ et $0 < r < n$.*

$$q^{r-1}\mathcal{T}_{K_{n,r}}(1,q) = \hat{\mathcal{P}}_{n,r}(q) \tag{18}$$

Preuve. Soit G un graphe à n sommets et F une forêt couvrante de G. On note $C_G(F)$ l'ensemble des couples (x,y) tels que

- y est un descendant de x dans F, mais pas un fils de x,
- si le chemin allant de x à y dans F commence par l'arête (x,z) alors $z > y$.

Dans [6], Gessel et Sagan ont montré que

$$\mathcal{T}_G(1+u,q) = \sum_F u^{a(F)-1} q^{|C_G(F)|},$$

où $a(F)$ est le nombre d'arborescences de F, la somme portant sur toutes les forêts couvrantes de G. En posant $u = 0$, on en déduit que

$$\mathcal{T}_G(1,q) = \sum_A q^{|C_G(A)|},$$

la somme portant sur toutes les arborescences couvrantes de G. De la même manière que dans la preuve précédente, il suffit alors de remarquer que si $G = K_{n,r}$, toute arborescence couvrante de $K_{n,r}$ vérifie $|C_G(A)| = inv(A) - r + 1$. Comme toute arborescence de $\mathcal{A}_{n,r}$ est une arborescence couvrante de $K_{n,r}$, on en déduit le résultat annoncé. ☐

2.2. **Evaluation de $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(-1)$.** L'évaluation de $\mathcal{P}_n(-1)$ fait apparaître des nombres bien connus, les nombres d'Euler. Il existe plusieurs spécialisations des nombres d'Euler, dont la suite des nombres d'Entringer [5], qui ont de nombreuses interprétations combinatoires en termes de permutations alternantes ou d'arborescences [10, 15, 16].

Définition 5. *Les nombres d'Entringer $e_{n,k}$ sont définis par la récurrence.*

$$e_{n,n} = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

$$e_{n+1,k+1} = e_{n+1,k} - e_{n,n+1-k},$$

et sont reliés aux nombres d'Euler par la relation

$$e_n = e_{n+1,1} = \sum_{k=1}^{n} e_{n,k}. \tag{19}$$

Proposition 9. *Soient $n > 0$ et $0 < r < n$.*

$$\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(-1) = e_{n,r}. \tag{20}$$

Avant de présenter la preuve de cette proposition, on remarque qu'en posant $r = 1$ on retrouve le fait que $\mathcal{P}_n(-1) = e_{n-1}$. De plus, en utilisant la relation (19), on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3. *Soit $n > 0$.*

$$\hat{\mathcal{P}}_n(-1) = e_n. \tag{21}$$

Le reste de cet article est consacrée à la preuve de la Proposition 9, pour laquelle nous nous inspirons de la preuve de l'identité (5) due à Pansiot [14]. Nous procédons en trois étapes :

(1) exhiber un sous-ensemble $\mathcal{B}_{n,r}$ de $\mathcal{A}_{n,r}$ de cardinal $e_{n,r}$, dont chaque arborescence a un nombre pair d'inversions,
(2) partitionner $\mathcal{A}_{n,r}$ en sous-familles $C_1,\ldots,C_l$ telles que pour $i = 1,\ldots,l$, C_i contient au plus une arborescence de $\mathcal{B}_{n,r}$ (on aura alors $\hat{\mathcal{P}}_{n,r}(-1) = \sum_{i=1}^{l} \mathcal{P}_{C_i}(-1)$),
(3) montrer que pour $i = 1,\ldots,l$, $\mathcal{P}_{C_i}(-1) = 1$ si C_i contient une arborescence de $\mathcal{B}_{n,r}$ et $\mathcal{P}_{C_i}(-1) = 0$ sinon, ce qui prouvera la Proposition 9.

Une sous-famille $\mathcal{B}_{n,r}$ de $\mathcal{A}_{n,r}$ de cardinal $e_{n,r}$. Pour définir la famille d'arborescences $\mathcal{B}_{n,r}$, il est nécessaire d'introduire la notion d'arborescence paire, utilisée notamment par Pansiot [14], Viennot [20] ou Kuznetsov, Pak et Postnikov [10].

Définition 6. *Une arborescence est* paire *si tout sommet différent de la racine a un nombre pair de fils. On note $\mathcal{B}_{n,r}$ la famille des arborescences A de $\mathcal{A}_{n,r}$ telles que, si $x_1,x_2,\ldots,x_k$ sont les fils de r et $A_1,A_2,\ldots,A_k$ les sous-arborescences de A de racines respectives $x_1,x_2,\ldots,x_k$, les A_i sont des* arborescences décroissantes paires contenant chacune un nombre impair de sommets supérieurs à r.

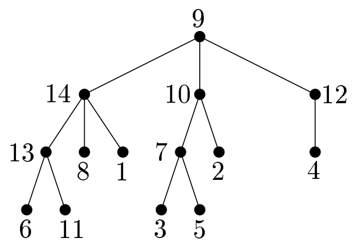


FIG. 1. Une arborescence de $\mathcal{B}_{14,0,9}$.

Lemme 1. *Pour tout arborescence A de $\mathcal{B}_{n,r}$, $inv(T)$ est pair.*

Preuve. Soit $A \in \mathcal{B}_{n,r}$. Les A_i étant des arborescences décroissantes paires, chaque sommet x, $x \neq r$ et $x \neq x_i$, a un nombre pair de descendants, et est supérieur à tous ses descendants. L'arborescence possède donc un nombre pair d'inversions de la forme (x,y) avec $x \neq r$ et $x \neq x_i$. La parité de $inv(A)$ est donc celle du nombre d'inversions de la forme (r,y) ou (x_i,y), pour $i = 1,2,\ldots,k$. Les A_i étant décroissantes, le nombre d'inversions de la forme (x_i,y) est égal à $n-k-1$. De plus, le nombre d'inversions de la forme (r,y) est égal à

$$r - 1 = n - 1 - \sum_{i=1}^{k} |A_i|_{>r}.$$

Il s'en suit que la parité de $inv(A)$ est celle de

$$2n - 2 - k - \sum_{i=1}^{k} |A_i|_{>r} = 2n - 2 - \sum_{i=1}^{k} (|A_i|_{>r} + 1).$$

Il suffit alors de rappeler que par définition de l'ensemble $\mathcal{B}_{n,r}$, $|A_i|_{>r}$ est impair pour $i = 1,2,\ldots,k$, pour conclure la preuve de ce lemme. □

Soit $\overline{\mathcal{B}}_{n,r}$ la famille des arborescences A telles que, si $x_1,x_2,\ldots,x_k$ sont les fils de la racine r et $A_1,A_2,\ldots,A_k$ les sous-arborescences de A de racines respectives $x_1,x_2,\ldots,x_k$, les A_i sont des *arborescences croissantes paires contenant chacune un nombre impair de sommets supérieurs à* r. Il existe une bijection immédiate entre $\overline{\mathcal{B}}_{n,r}$ et $\mathcal{B}_{n,r}$ (elle consiste, pour chaque A_i, à échanger son plus grand sommet et son plus petit sommet, puis son second plus grand et son second plus petit, etc). La figure 2, page suivante, représente une arborescence de $\mathcal{B}_{n,r}$ et l'arborescence correspondante de $\overline{\mathcal{B}}_{n,r}$. On constate qu'une arborescence de $\overline{\mathcal{B}}_{n,r}$ n'appartient pas en général à $\mathcal{B}_{n,r}$.

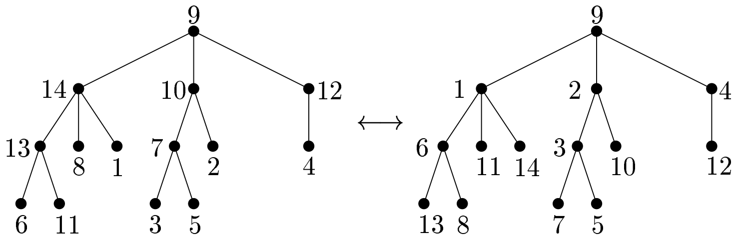


FIG. 2. La correspondance entre $\overline{\mathcal{B}}_{n,r}$ et $\mathcal{B}_{n,r}$

Soit $\mathcal{C}_{n,r}$ la famille des arborescences croissantes paires sur $[n]$ telles que le père du sommet n (nécessairement une feuille) est le sommet r. Kuznetsov, Pak et Postnikov ont montré bijectivement le résultat suivant.

Théorème 1. [10, Théorème 4] *Soient* $n > 0$ *et* $0 < r < n$.

$$|\mathcal{C}_{n+1,r}| = e_{n,r}.$$

Pour prouver que $\mathcal{B}_{n,r} = e_{n,r}$, il suffit donc d'établir une bijection entre $\mathcal{C}_{n+1,r}$ et $\overline{\mathcal{B}}_{n,r}$.

Lemme 2. *Il existe une bijection* ϕ *entre* $\mathcal{C}_{n+1,r}$ *et* $\overline{\mathcal{B}}_{n,r}$.

Preuve. Soit A une arborescence de $\mathcal{C}_{n+1,r}$. On distingue deux cas.

Cas 1. Dans un premier temps, on traite le cas où $r = 1$ (et donc la racine de A). Dans ce cas $\phi(A)$ est obtenue en supprimant le sommet $n+1$ de A. Du fait que A est une arborescence croissante et paire, on a bien $\phi(A) \in \overline{\mathcal{B}}_{n,r}$. On a donc dans ce cas une bijection entre les arborescences de $\mathcal{C}_{n+1,1}$ et les arborescences de $\overline{\mathcal{B}}_{n,1}$.

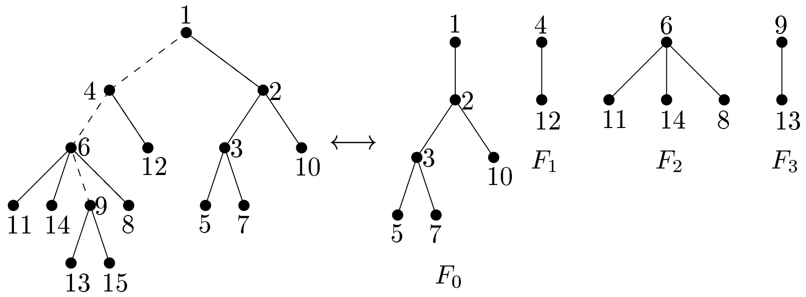
Cas 2. On suppose maintenant que $r \neq 1$. La bijection ϕ, qui se décompose alors en 4 étapes que nous illustrons au fur et à mesure par un exemple, est basée sur les notions de de *r-forêt paire* et de *r-forêt impaire* d'une arborescence.

Soient B une arborescence quelconque, $x_1,\ldots,x_k$ les fils de la racine de B et $B_1,\ldots,B_k$ les sous-arborescences de B de racines respectives $x_1,\ldots,x_k$: pour un r donné, la r-forêt paire (resp. impaire) de B est le sous-ensemble des B_i ayant un nombre pair (resp. impair) de sommets supérieurs à r.

Etape 1. On supprime dans A la feuille $n+1$, puis toutes les arêtes du chemin allant de la racine 1 à r, ce qui donne une forêt ordonnée $F = \{F_0,F_1,\ldots, F_k\}$ de $k+1$ arborescences de racines respectives $x_0(=1) < x_1 < \cdots < x_k(=r)$. La construction inverse, produisant A à partir de F, est immédiate du fait de l'ordre sur les racines des F_i.

Dans notre exemple, on considère une arborescence de $\mathcal{C}_{15,9}$. La figure suivante illustre cette décomposition de A en F (les arêtes en pointillées représentent le chemin de la racine 1 au sommet r). La forêt F vérifie alors la propriété suivante.

(a) *Pour $i = 0,1,\ldots,k$, F_i est une arborescence croissante paire. De plus, si $i > 0$, la racine x_i de F_i a un nombre impair de fils.*



Etape 2. On partitionne $F = \{F_0,F_1,\ldots, F_k\}$ en trois sous-ensembles : l'arborescence F_k, l'ensemble $F' = \{F_0,F'_1,\ldots,F'_l\}$ et l'ensemble $F'' = \{F''_1,\ldots,F''_{k-l-1}\}$ où les F'_i (resp. F''_j) sont les arborescences de F autres que F_0 (resp. que F_k) ayant un nombre pair (resp. impair) de sommets supérieurs à r. On peut avoir F'' vide (notamment lorsque $k = 2$). Dans notre exemple, on a $F' = \{F_0,F_2\}$ et $F'' = \{F_1\}$. La construction inverse, produisant F à partir de F_k, F' et F'' est immédiate, et F' vérifie les propriétés suivantes.

(b) *Pour tout $i > 0$, la r-forêt impaire (resp. paire) de F'_i contient un nombre pair (resp. impair) d'arborescences.*

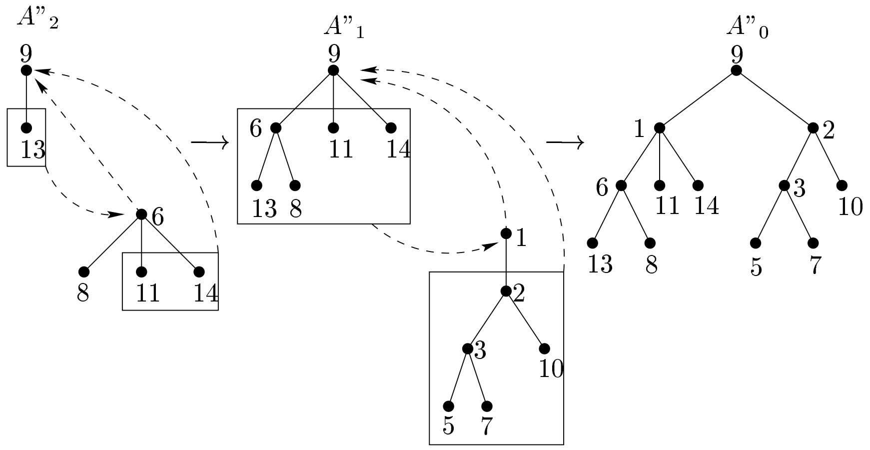
En effet, comme F'_i contient un nombre pair de sommets supérieurs à r, la r-forêt impaire de F'_i ne peut contenir qu'un nombre pair d'arborescences. Et comme la racine de F'_i a un nombre impair de fils (propriété (a)), la r-forêt paire de F'_i contient un nombre impair d'arborescences.

(c) *Pour tout i, la r-forêt impaire (resp. paire) de F''_i contient un nombre impair (resp. pair) d'arborescences.*

On prouve (c) de la même manière que (b).

Etape 3. La troisième étape consiste à construire de manière incrémentale une arborescence A'' à partir de F_k en “insérant” les arborescences de F' de la manière suivante. On commence par poser $A''_{l+1} = F_k$, puis pour i allant de l à 0, on échange les r-forêts impaires de F'_i et A''_{i+1} (les arborescences de la r-forêt impaire de F'_i sont insérées sous la racine de A''_{i+1} pendant que, simultanément, les arborescences de la r-forêt impaire de A''_{i+1} sont insérées sous la racine x'_i de F'_i) et enfin on insère l'arborescence F'_i ainsi modifiée sous la racine de A''_{i+1} (x'_i devient un fils de cette racine) pour obtenir A''_i. Finalement, on pose $A'' = A''_0$.

Sur notre exemple, on effectue donc les opérations décrites par la figure suivante (on entoure les r-forêts impaires qu'on va échanger). On rappelle que $F' = \{F_0,F_2\}$ et $F_k = F_3$.



On vérifie alors les propriétés suivantes.

(d) *Pour $i = 0,\dots,l+1$, la racine de A''_i est r.*

En effet, la racine de $F_k = A''_{l+1}$ est r, par définition de F_k, et aucune des opérations effectuées lors du passage de A''_{i+1} à A''_i ne modifie cette racine.

(e) *Pour $i = 1,\dots,l+1$, la racine r de A''_i a un nombre impair de fils et pour $i = 0,\dots,l+1$, la r-forêt paire de A''_i est vide.*

Pour le cas $i = l+1$, cela découle directement de la définition de $F_k = A''_{l+1}$, qui est une arborescence croissante paire de racine r, et de la propriété (a). Pour le cas général, cela découle de la transformation de A''_{i+1} en A''_i :

- on remplace la r-forêt impaire de F'_i, qui contient un nombre pair d'arborescences, sauf éventuellement si $i = 0$ (propriété (b)), par celle de A''_{i+1}, qui en contient un nombre impair (par induction), ce qui entraîne que parmi ses descendants, x'_i a maintenant un nombre impair de sommets supérieurs à r,
- on remplace la r-forêt impaire de r (par induction, cela revient à enlever tous les fils de r) par celle de F'_i (qui contient un nombre pair d'arborescences) et on greffe ensuite une arborescence ayant un nombre impair de sommets supérieurs à r comme on vient de le voir.

(f) *Pour $i = 0,\dots,l$, le plus petit fils de la racine r de A''_i est x'_i (la racine de F'_i).*

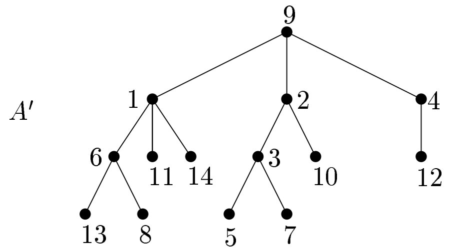
Les fils de r dans A''_i sont les racines de la r-forêt impaire de F'_i (c'est à dire des sommets supérieurs à x'_i puisque F'_i est une arborescence croissante) et x'_i lui-même.

(g) *Pour $i = 0,\dots,l+1$, les sous-arborescences de A''_i ayant pour racines les fils de r sont croissantes paires.*

Cette propriété découle directement de la construction de A''_i et de la propriété (a) qui assure que les F'_i sont des arborescences croissantes paires.

La propriété (f) permet de définir la construction inverse, donnant F_k et F' à partir d'une arborescence A'' de r-forêt paire vide : tant que le plus petit fils x de la racine r de A'' vérifie $x < r$ (on note A_x la sous-arborescence de A'' de racine x), on supprime l'arête reliant r et x, on échange simultanément les r-forêts impaires de A'' (privé de A_x) et de A_x, puis on ajoute l'arborescence A_x ainsi modifié à F'; l a dernière arborescence A'' restante pour laquelle r est inférieur à tous ses fils est F_k.

Etape 4. Finalement, la dernière étape consiste à insérer sous la racine r de A'' toutes les arborescences de F''. On déduit des propriétés (c), (d), (e) et (g) que l'arborescence A' ainsi obtenue appartient bien à $\overline{\mathcal{B}}_{n,r}$.



La construction inverse, donnant F'' et A'' à partir de A', est basée sur les propriétés (c) et (e) et sur le fait que F_0 est de racine 1 et n'appartient pas à F''. Elle consiste à déterminer toutes les sous-arborescences de A' de racine autre que 1 ayant une r-forêt paire contenant un nombre pair d'arborescences. Les arborescences ainsi déterminées de A' forment F''. □

Nous avons donc achevé la première étape de la preuve de la Proposition 9, en exhibant un sous-ensemble de $\mathcal{A}_{n,r}$ de cardinal $e_{n,r}$ ne contenant que des arborescences ayant un nombre pair d'inversions.

Partition de la famille $\mathcal{A}_{n,r}$. Cette deuxième étape a pour objectif de partitionner $\mathcal{A}_{n,r}$ en sous-ensembles $C_1, \ldots, C_l$ contenant chacun au plus une arborescence de $\mathcal{B}_{n,r}$. Nous allons définir cette partition en termes de classes d'équivalence d'une relation basée sur la notion de *sommets échangeables*, notion introduite par Pansiot [14].

Définition 7. *Soit A une arborescence, x et y deux sommets de A tels que y est un descendant de x. On dit que x et y sont* échangeables *si il n'existe pas de sommet z descendant de x vérifiant $x < z < y$ ou $y < z < x$.*

Par exemple, dans l'arborescence A_1 de la figure 3 ci-dessous, les sommets 5 et 6 sont échangeables, alors que les sommets 5 et 8 ne le sont pas, ni les sommets 1 et 3. Il est clair qu'échanger deux sommets échangeables inverse la parité du nombre d'inversions.

Définition 8. *Soient A et A' deux arborescences de $\mathcal{A}_{n,r}$. On dit que A et A' sont* équivalentes pour l'échange racine-contraint *si il existe k arborescences $A_1, \ldots, A_k$ de $\mathcal{A}_{n,r}$ telles que $A_1 = A$, $A_k = A'$ et, pour $0 < i < k$, A_i et A_{i+1} diffèrent par l'échange de deux sommets échangeables (racine contraint signifie ici que la racine reste inchangée et toujours inférieure à ses fils).*

Notation 1. Pour une arborescence A de $\mathcal{A}_{n,r}$, on note $C_r(A)$ la clôture transitive de A pour la relation d'équivalence définie par l'échange racine-contraint.

La relation d'équivalence ainsi définie à partir de la notion d'échange racine-contraint induit donc une partition de $\mathcal{A}_{n,r}$ en classes d'équivalence, les classes $C_r(A)$ pour toutes les arborescences A de $\mathcal{A}_{n,r}$. Pour vérifier que toute classe contient au plus une arborescence de $\mathcal{B}_{n,r}$, on introduit une deuxième relation d'équivalence.

Définition 9. *Soit $k \in [n]$. On dit que deux arborescences A et A' sont* équivalentes pour l'échange k-contraint *si il existe m arborescences $A_1, \ldots, A_m$ telles que $A_1 = A$, $A_m = A'$, pour tout i la racine de A_i est supérieure ou égale à k et, pour $0 < i < m$, on passe de A_i à A_{i+1} par l'échange de deux sommets échangeables.*

Notation 2. Pour une arborescence A donnée, on note $C^k(A)$ la clôture transitive de A pour la relation d'équivalence définie par l'échange k-contraint.

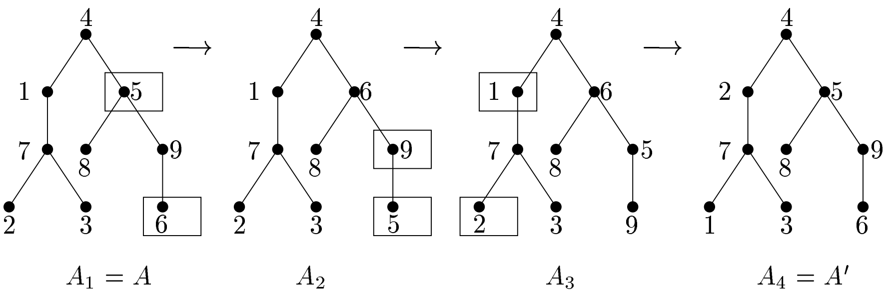


FIG. 3. Illustration de l'équivalence pour l'échange racine-contraint

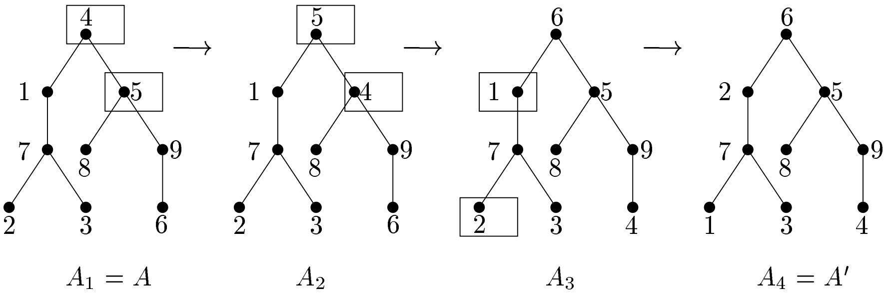
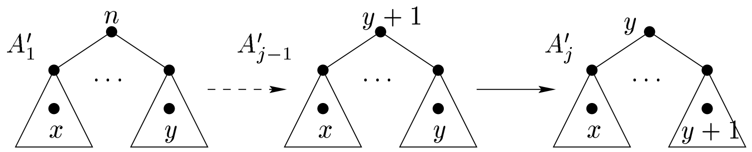


FIG. 4. Illustration de l'équivalence pour l'échange 4-contraint

Lemme 3. *Soient k et n deux entiers tels que $k \in [n]$, et A une arborescence sur $[n]$ de racine supérieure ou égale à k. Alors $C^k(A)$ contient* une et une seule *arborescence décroissante.*

Preuve. Il est clair que la classe $C^k(A)$ contient au moins une arborescence décroissante. En effet, par une série d'échanges k-contraint, on peut faire "remonter" n à la racine : échange de la racine x avec $x+1$, puis $x+1$ avec $x+2$, etc et on réitère ce procédé pour chacune des sous-arborescences en "remontant" le plus grand sommet, ... jusqu'à obtenir une arborescence décroissante.

Il reste alors à montrer qu'il n'y en a qu'une seule. Pour cela prenons A' et A'' deux arborescences décroissantes (de racine n donc) équivalentes pour l'échange k-contraint. Supposons qu'il existe deux sommets x, $y > k$ tels que le plus proche ancêtre commun de x et y est la racine n dans A', et un sommet différent de n dans A''. Il existe donc $A' = A'_1, \ldots, A'_m = A''$ telles que A'_i et A'_{i+1} diffèrent par un échange k-contraint. Du fait que y doit être "transporté" dans la sous-arborescence de la racine contenant x, on en déduit qu'il existe $l < m$ tel que la racine de A'_l est y et $y+1$ n'est pas dans la sous-arborescence contenant x. En effet, y devant passer par la racine, n doit la quitter et ne peut être échangé qu'avec $n-1$, puis $n-1$ seulement avec $n-2$, ..., et enfin $y+1$ avec y.



Comme n est la racine de A'_m, un raisonnement analogue conduit à affirmer qu'il faudra effectuer de nouveau l'échange $(y,y+1)$ et donc extraire y de la sous-arborescence contenant x. Donc, si A'

et A'' sont deux arborescences décroissantes appartenant à $C^k(A)$, le plus proche ancêtre commun du couple de sommets (x,y) dans A' est n si et seulement si le plus proche ancêtre commun du couple de sommets (x,y) dans A'' est n. En répétant récursivement ce raisonnement sur les sous-arborescences de A' et A'' ayant pour racines les fils de n, on montre que tout couple de sommets (x,y) a même plus proche ancêtre commun dans A' et A'', et donc que $A' = A''$. □

Notation 3. Pour une arborescence A, de racine supérieure ou égale à k, on note $Dec^k(T)$ l'unique arborescence décroissante de $C^k(T)$.

Lemme 4. *Soit* $A \in \mathcal{A}_{n,r}$. $C_r(A)$ *contient* une et une seule *arborescence* A' *telle que sa racine* r *est inférieure à ses fils* $x_1,\dots,x_k$ *et ses sous-arborescences* $A'_1,\dots,A'_k$ *de racines respectives* $x_1,\dots,x_k$ *sont décroissantes.*

Preuve. Comme on effectue seulement des échanges racine-contraints, si deux arborescences A' et A'' appartiennent à $C_r(A)$, le plus proche ancêtre commun de (x,y) dans A' est r si et seulement si le plus proche ancêtre commun de (x,y) dans A'' est r. En appliquant le Lemme 3 aux sous-arborescences de A' et A'' ayant pour racines les fils de r, on prouve bien que au plus une des deux arborescences A' et A'' peut vérifier les conditions du lemme. Le fait qu'il en existe une s'obtient par un raisonnement identique à celui employé dans la preuve précédente. □

Notation 4. Pour une arborescence $A \in \mathcal{A}_{n,r}$, on note $Dec_r(A)$ l'unique arborescence de $C_r(A)$ vérifiant les propriétés du Lemme 4.

Nous avons donc complété la deuxième étape de la preuve de la proposition 9, en décrivant une partition de $\mathcal{A}_{n,r}$ en ensembles tels que chacun d'entre eux contient au plus une arborescence de $\mathcal{B}_{n,r}$ (chacun contient une seule arborescence dont la racine est inférieure à ses fils et les sous-arborescences sont décroissantes).

Evaluation en -1 du polynôme énumérateurs des inversions des classes $C_r(A)$. Dans cette dernière partie de la preuve, pour toute arborescence A, on note $\mathcal{P}_{C_r(A)}(q)$ (resp. $\mathcal{P}_{C^k(A)}(q)$) le polynôme énumérateur des inversions de l'ensemble d'arborescences $C_r(A)$ (resp. $C^k(A)$). Comme précédemment, on s'intéresse d'abord aux classes d'équivalence pour l'échange k-contraint.

Lemme 5. *Soit A une arborescence sur $[n]$ de racine n et $B = Dec^n(A)$. $\mathcal{P}_{C^n(A)}(-1) = 0$ si B est une arborescence décroissante paire et $\mathcal{P}_{C^n(A)}(-1) = (-1)^{inv(B)}$ sinon.*

Preuve. Dans [14], Pansiot établit une involution ψ sur les arborescences de racine n non décroissantes paires telle que A et $\psi(A)$ diffèrent par un échange n-contraint ($inv(A)$ et $inv(\psi(A))$ n'ont donc pas même parité). Pour toute arborescence de racine n, la classe $C^n(A)$ contenant au plus une arborescence décroissante (Lemme 3), le Lemme est une conséquence directe du résultat de Pansiot. □

Lemme 6. *Soient $k \in [n]$, A une arborescence sur $[n]$ de racine k et $B = Dec^k(A)$. $\mathcal{P}_{C^k(A)}(-1) = \mathcal{P}_{C^n(A)}(-1) \times (|B|_{\geq k} \mod 2)$.*

Preuve. On note D_i la classe des arborescences de $C^k(A)$ de racine i (pour $i = k,\dots,n$). On a alors $D_n = C^n(B)$ et on construit D_i à partir de D_{i+1} en échangeant les sommets i et $i+1$ dans toutes les arborescences de D_{i+1}. Par construction des D_i, on vérifie immédiatement que $\mathcal{P}_{D_i}(-1) = -\mathcal{P}_{D_{i+1}}(-1)$. Le Lemme découle alors du fait que $\mathcal{P}_{C^k(A)}(-1) = \sum_{i=k}^{n} \mathcal{P}_{D_i}(-1)$. hfill□ □

Lemme 7. *Soit $A \in \mathcal{A}_{n,r}$. $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 1$ si $Dec_r(A) \in \mathcal{B}_{n,r}$ et $P_{C_r(A)}(-1) = 0$ sinon.*

Preuve. Soient $x_1, \dots, x_k$ les fils de r dans $Dec_r(A)$ et $A'_1, \dots, A'_k$ les sous-arborescences de $Dec_r(A)$ de racines respectives $x_1, \dots, x_k$. On note D_i (resp. D'_i) l'ensemble d'arborescences $C^r(A'_i)$ (resp. $C^{x_i}(A'_i)$). Comme toutes les arborescences de $C_r(A)$ ont même racine r, et qu'on ne fait pas d'échange impliquant r, on en déduit que toute arborescence de $Dec_r(A)$ est constitué d'une racine r et de k sous arborescences $T_1, \dots, T_k$ telles que $T_i \in D_i$. Comme de plus, pour tout $i \in [k]$ $\mathcal{P}_{C^r(A'_i)}(-1) = -1$, 0 ou 1 (conséquence des Lemmes 5 et 6), on a

$$\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = (-1)^{r-1} \times \prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_{C^r(A'_i)}(-1)$$

ou de manière équivalente (Lemme 6)

$$\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = (-1)^{r-1} \times \left(\prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_{C^{x_i}(A'_i)}(-1) \times (|A'_i|_{\geq r} \mod 2) \right),$$

ce qui est aussi équivalent à

$$\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = (-1)^{inv(Dec^r(A))} \times \left(\prod_{i=1}^{k} |\mathcal{P}_{C^{x_i}(A'_i)}(-1)| \times (|A'_i|_{\geq r} \mod 2) \right), \tag{22}$$

On a donc $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 0$ si et seulement si il existe $i \in [k]$ tel que $\mathcal{P}_{C^{x_i}(A'_i)}(-1) = 0$ ou $(|A'_i|_{\geq r} \mod 2) = 0$, ce qui est équivalent à dire que $Dec_r(A) \notin \mathcal{B}_{n,r}$. Donc si $Dec_r(A) \in \mathcal{B}_{n,r}$ on a $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 1$ ou $P_{C_r(A)}(-1) = -1$, et si $Dec_r(A) \notin \mathcal{B}_{n,r}$ on a $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 0$. Or si $Dec_r(A) \in \mathcal{B}_{n,r}$, les A'_i sont des arborescences décroissantes paires. Donc, d'après le Lemme 5, qui permet d'affirmer que pour tout i, $|\mathcal{P}_{C^{x_i}(A'_i)}(-1)| = 1$, et le Lemme 1, qui permet d'affirmer que $inv(Dec_r(A))$ est pair, on a bien $\mathcal{P}_{C_r(A)}(-1) = 1$. □

Ceci conclut la preuve de la Proposition 9, qui est une conséquence du Théorème 1, des Lemmes 2, 4 et 7.

Références

[1] Athanasiadis (C.) et Linusson (S.). – A simple bijection for the regions of the Shi arrangement of hyperplans. *Discrete Math.*, vol. 204, n° 1-3, 1999, pp. 27–39.

[2] Beissinger (J. S.). – On external activity and inversions in trees. *J. Combin. Theory Ser. B*, vol. 33, n° 1, 1982, pp. 87–92.

[3] Chauve (C.), Dulucq (S.) et Guibert (O.). – Enumeration of some labelled trees. *In : Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, FPSAC'00*, éd. par Krob (D.), Mikhalev (A. A.) et Mikhalev (A. V.). pp. 146–157. – Springer.

[4] Chen (W. Y. C.). – The pessimistic search and the straightening involution for trees. *European J. Combin.*, vol. 19, n° 5, 1998, pp. 553–558.

[5] Entringer (R. C.). – A combinatorial interpretation of the Euler and Bernoulli numbers. *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, vol. 14, 1966, pp. 241–246.

[6] Gessel (I. M.) et Sagan (B. E.). – The Tutte polynomial of a graph, depth-first search, and simplicial complex partitions. *Electron. J. Combin.*, vol. 3, n° 2, 1996. – Research Paper 9, 36 pp.

[7] Gessel (I. M.), Sagan (B. E.) et Yeh (Y. N.). – Enumeration of trees by inversions. *J. Graph Theory*, vol. 19, n° 4, 1995, pp. 435–459.

[8] Gessel (I. M.) et Wang (D. L.). – Depth-first search as a combinatorial correspondence. *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 26, n° 3, 1979, pp. 308–313.

[9] Kreweras (G.). – Une famille de polynômes ayant plusieurs propriétés énumératives. *Period. Math. Hungar.*, vol. 11, n° 4, 1980, pp. 309–320.

[10] Kuznetsov (A. G.), Pak (I.) et Postnikov (A.). – Increasing trees and alternating permutations. *Russian Math. Survey*, vol. 49, 1994, pp. 79–110.

[11] Mallows (C. L.) et Riordan (J.). – The inversion enumerator for labeled trees. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 74, 1968, pp. 92–94.

[12] Moon (J. W.). – *Counting labelled trees.* – Montréal, Canadian Mathematical Congress, 1970, *Canadian Mathematical Monographs*, volume 1.
[13] Moszkowski (P.). – Arbres et suites majeures. *Period. Math. Hungar.*, vol. 20, n° 2, 1989, pp. 147–154.
[14] Pansiot (J.-J.). – Nombres d'Euler et inversions dans les arbres. *European J. Combin.*, vol. 3, n° 3, 1982, pp. 259–262.
[15] Poupard (C.). – De nouvelles significations énumératives des nombres d'Entringer. *Discrete Math.*, vol. 38, n° 2-3, 1982, pp. 265–271.
[16] Poupard (C.). – Deux propriétés des arbres binaires ordonnés stricts. *European J. Combin.*, vol. 10, n° 4, 1989, pp. 369–374.
[17] Stanley (R. P.). – Hyperplane arrangements, interval orders, and trees. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 93, n° 6, 1996, pp. 2620–2625.
[18] Stanley (R. P.). – Hyperplane arrangements, parking functions and tree inversions. *In: Mathematical essays in honor of Gian-Carlo Rota.* pp. 359–375. – Birkhäuser.
[19] Tutte (W. T.). – A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canadian J. Math.*, vol. 6, 1954, pp. 80–91.
[20] Viennot (G.). – Une interprétation combinatoire des coefficients des développements en série entière des fonctions elliptiques de Jacobi. *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 29, n° 2, 1980, pp. 121–133.
[21] Yan (C. H.). – Generalized tree inversions and k-parking functions. *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 79, n° 2, 1997, pp. 268–280.

E-mail address: [chauve,duchon,dulucq]@labri.u-bordeaux.fr

LaBRI, Université Bordeaux I, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence, France